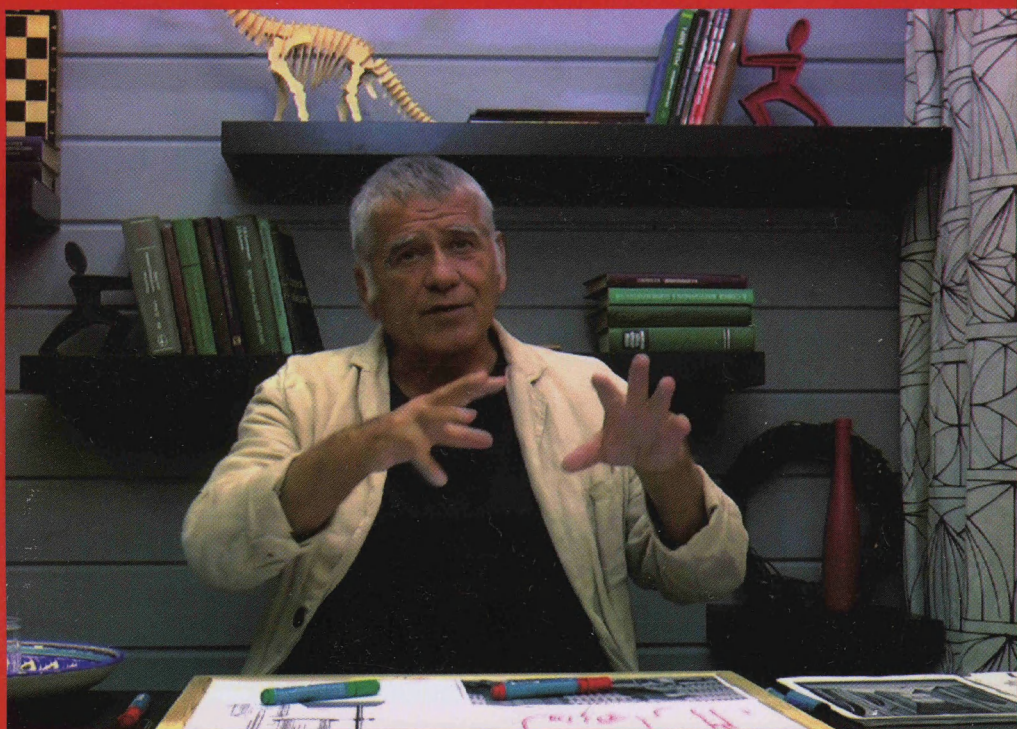


# Школа Опойцева



## Тригонометрия

старшие классы

**Час, затраченный  
на понимание,  
экономит год  
жизни.**



URSS

# Школа Опойцева

---

## Тригонометрия

Старшие классы

МОСКВА

---



URSS

**Опойцев Валерий Иванович**

**Школа Опойцева: Тригонометрия. Старшие классы.**

М.: ЛЕНАНД, 2017. — 120 с.

Коротко, просто и полно излагается школьная тригонометрия с добавлением факультативных элементов. Краткое и ясное изложение предмета создает общую картину, чего обычно не хватает при медленном и расплывчатом процессе обучения.

Курс может быть использован:

- (i) для обычных и ускоренных занятий математикой;
- (ii) для повторения пройденного и упущенного;
- (iii) для самообразования.

Полезное для себя найдут также учителя и родители.

Текст сопровождается видеолекциями на [oschool.ru](http://oschool.ru) и на [youtube.com](http://youtube.com)

*Графическое оформление Марины Павликовской*

ООО «ЛЕНАНД».

117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

Формат 60×90/16. Печ. л. 7,5. Зак. № АЛ-132.

Отпечатано в ООО «Курганский Дом печати».

640022, Курган, ул. К. Маркса, 106.

ISBN 978-5-9710-3798-9

© ЛЕНАНД, 2016

20575 ID 219356



9 785971 037989



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Теоретический минимум</b>	<b>7</b>
1.1 Тригонометрические функции . . . . .	7
1.2 Единичная окружность . . . . .	9
1.3 Графики основных функций . . . . .	12
1.4 Простейшие формулы . . . . .	15
1.5 Формулы приведения . . . . .	16
1.6 Скалярное произведение . . . . .	19
1.7 Основные формулы . . . . .	22
1.8 Некоторые углы . . . . .	25
1.9 Обратные функции . . . . .	26
1.10 Арктангенс . . . . .	31
1.11 Аркфункции с большой буквы . . . . .	32
1.12 Метод вспомогательного угла . . . . .	32
<b>Глава 2. Приложения к геометрии и физике</b>	<b>35</b>
2.1 Теорема косинусов . . . . .	35
2.2 Теорема синусов . . . . .	37
2.3 Геометрия треугольников . . . . .	39
2.4 Разложение сил и скоростей . . . . .	41
2.5 Гармонические сигналы . . . . .	45
<b>Глава 3. Задачи и решения</b>	<b>48</b>
3.1 Преобразования и тождества . . . . .	48
3.2 Уравнения и системы уравнений . . . . .	53
3.3 Замена переменных . . . . .	54
3.4 Однородные уравнения . . . . .	57

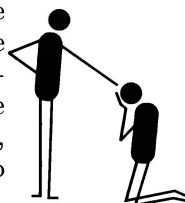


3.5	Как не прозевать тригонометрию . . . . .	57
3.6	Обратные функции . . . . .	60
3.7	Неравенства . . . . .	65
<b>Глава 4.</b>	<b>Факультатив . . . . .</b>	<b>70</b>
4.1	Комплексные числа . . . . .	70
4.2	Тригонометрическая форма КЧ . . . . .	73
4.3	Что там, за горизонтом . . . . .	75
4.4	Примеры . . . . .	78
4.5	Координаты и векторы . . . . .	81
4.6	Линейная независимость . . . . .	84
4.7	Как это работает . . . . .	86
4.8	Скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	90
4.9	Ориентация пространства* . . . . .	94
4.10	Векторное произведение* . . . . .	96
4.11	Угловая скорость . . . . .	99
4.12	Небольшой сбор урожая* . . . . .	100
4.13	Прямые и плоскости* . . . . .	102
<b>Глава 5.</b>	<b>Короткая справка . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>Обозначения . . . . .</b>		<b>113</b>

# Предисловие

*Час, затраченный на понимание,  
экономит год жизни.*

Мастерская тригонометрии обслуживает многие научные отрасли, в том числе математические. Не только — саму себя, как иногда кажется. Так что инструмент — необходимый, но популярностью в школе не пользуется. Ибо скучно и громоздко. И ещё потому, что математике в школе учат в расчёте на тех, у кого способности к *танцам, музыке и футболу*<sup>1</sup>.



Спору нет. Таких людей требуется много. Поэтому учебный материал урезается так, чтобы танцевать хотелось больше. Всё интересное выкорчевывается. Поскольку Вовчик с Уолл-стрит, заинтересовавшись синусами, может пойти не по той дорожке.



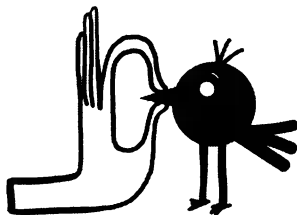
Если говорить серьёзно, программы *идеологически* переупрощаются, дабы Вольдемар из Васюков, не дай бог, чего-нибудь недопонял. Пусть, мол, всем всё будет понятно. Лозунг замечательный, но дьявол прячется в деталях. Компенсируя идейную бедность, занятия насыщают казуистикой и техническими подробностями. В результате *всем всё становится непонятно* и учиться не хочется по иным причинам. Данный учебник написан в другом ключе.

Вся теория, первые две главы, — около 40 страниц. Но задачи с решениями — не менее важная штука, глава 3. Тут намечаются магистральные пути и задержаться в размышлениях имеет смысл. Что

---

<sup>1</sup> Хотя и для футбола толку мало.

касается *Факультатива*, название говорит само за себя. Кто опасается, как бы не выучить чего лишнего, действует одним способом, кто ищет пути к успеху — другим. Время от времени даётся ссылка на **АА**, что подразумевает учебник «Школа Опойцева: Арифметика и алгебра, 6 –11».



Какие-то нюансы, иногда самые главные, более естественно ложатся в видеоформат — тогда есть резон направлять стопы на сайт «ШКОЛА ОПОЙЦЕВА» — **oschool.ru**, где имеется видеосопровождение учебников данной серии. Рутинные подробности в видеороликах обходятся стороной, текстовый формат для них лучше подходит. А вот болевые точки требуют живого слова и проникающего акцента, что нуждается хоть в каком-то общении.

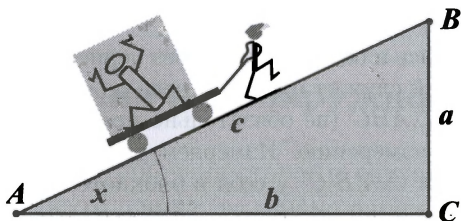
# Глава 1

## Теоретический минимум

*90% жизни уходит на приготовления.*

### 1.1 Тригонометрические функции

Тригонометрия манипулирует следующими *числовыми характеристиками угла  $x$* , рис. (1.1):



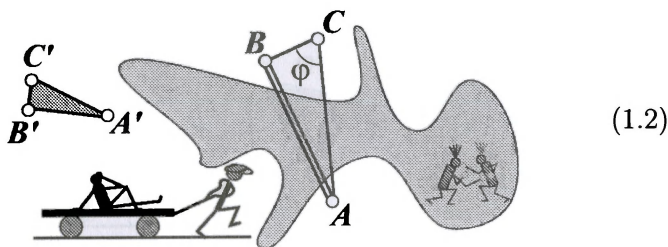
$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{a}{c}, \\ \cos x &= \frac{b}{c}, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{a}{b}, \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{b}{a}.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Речь в (1.1) идёт об отношениях сторон прямоугольного треугольника  $ABC$ . Но любой другой прямоугольный треугольник с тем же углом  $x$  — подобен  $\triangle ABC$ , и потому отношения соответствующих сторон будут такими же. Поэтому функции угла  $x$  определяются на базе прямоугольного треугольника:

- *Синус*  $\sin x = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}.$
- *Косинус*  $\cos x = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}.$

- *Тангенс*  $\operatorname{tg} x = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$
- *Котангенс*  $\operatorname{ctg} x = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$

В пользу тригонометрии часто приводят аргументы следующего вида. Допустим, надо измерить расстояние  $AB$ , рис. (1.2). Измерению рулеткой препятствует река, озеро, вражеская территория, не говоря об отсутствии рулетки или желания.



Тогда, находясь в точке  $B$ , фиксируем направление на  $A$ , проводим к  $BA$  перпендикуляр и выбираем на нём любую точку  $C$ . Далее рулеткой измеряем  $BC$  и угол  $\varphi$ . Получаем:  $AB = BC \cdot \operatorname{tg} \varphi$ .

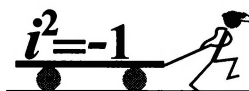
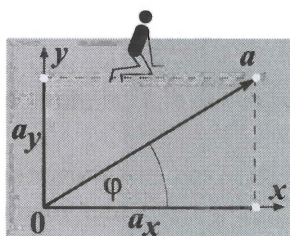
Разумеется, мы бы обошлись и без тангенса, и без перпендикуляра. Мотором косвенных измерений служит на самом деле геометрическая идея подобия. Берём любой  $\triangle ABC$  (не обязательно прямоугольный) со стороной  $BC$ , доступной измерению. Измеряем углы при  $BC$ , и строим подобный треугольник  $\triangle A'B'C'$  у себя в блокноте, взяв  $B'C'$  от фонаря. Измеряем отношение  $k = \frac{A'B'}{B'C'}$ . В итоге:  $AB = BC \cdot k$ .



Но с ориентацией на тригонометрию рецепт действует проще. Соответствующее явление *параллакса* (изменение видимого положения объекта при изменении положения наблюдателя) широко используется не только в геодезии, но и в астрономии — для измерения расстояний до удалённых объектов.

Источником бессмертия *тригонометрических функций* служат, конечно, не задачи типа (1.2). Причины другие — и главная совсем простая. Вектор  $a$  на плоскости, рис. (1.3), описы-

вают двумя способами. Либо с помощью *декартовой*, либо *полярной системы координат*,  $\boxed{\mathbf{a} = \{a_x, a_y\}}$  или  $\boxed{\mathbf{a} = \{|\mathbf{a}|, \varphi\}}$ , где  $|\mathbf{a}| = a$  — длина вектора  $\mathbf{a}$ .



(1.3)

При этом соотношения

$$a_x = a \cos \varphi, \quad a_y = a \sin \varphi \quad (1.4)$$

«защиты» на одном из поворотов Вселенной, и почти все дисциплины вынуждены ходить этим путём<sup>1</sup>.

## 1.2 Единичная окружность

Поскольку отношения сторон в ситуации (1.1) не зависят от размеров треугольника, то можно фиксировать наиболее выгодный вариант — с гипотенузой, равной единице<sup>2</sup>. Если при этом вершину угла  $x$  закреплять в нуле, то вершина другого острого угла — точка  $A$  на рис. (1.5) — при изменении  $x$  будет двигаться по единичной окружности<sup>3</sup>. Разумеется, в пределах *первой четверти окружности*<sup>4</sup>. Мы говорим пока только о первой четверти, потому что так пока были определены синусы/косинусы.

<sup>1</sup> См. «комплексные числа» в **АА**.

<sup>2</sup> Для синуса/косинуса. Либо с катетом, равным единице, — для тангенса/котангенса.

<sup>3</sup> Окружности радиуса  $R = 1$ .

<sup>4</sup> Четверти нумеруются как на рис. (1.5) римскими цифрами.



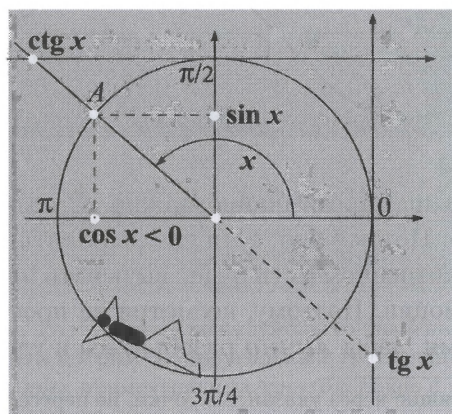


всем надоели, но если вам не довелось... — потренируйтесь.

Теперь о самом главном. В **АА** мы несколько раз говорили о «расширениях игровых площадок», в результате которых из натурального ряда возникали *отрицательные числа*, потом *рациональные*, затем *вещественные*<sup>8</sup>. Причём делалось это для того, чтобы арифметике было удобно играть на этих площадках. Чтобы мяч не улетал в аут — чтобы арифметические действия не выводили за пределы конструируемых числовых полей.

Аналогичная проблема возникает и в данном случае. Нас не устраивает слишком узкая *область определения*  $[0, \frac{\pi}{2}]$  тригонометрических функций из-за их привязки к прямоугольным треугольникам. Углы поворота могут складываться и давать в сумме любой угол, больший  $\frac{\pi}{2}$  и даже  $2\pi$ , и вообще сколь угодно большой. Поэтому *область определения*  $[0, \frac{\pi}{2}]$  хотелось бы расширить до  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

Напрашивается очень простой выход из положения. Давайте названные выше *оси синусов/косинусов* узаконим для любых углов  $x \in (-\infty, \infty)$ . Синус и косинус будут определяться как проекции на оси изображающей точки  $A$  на окружности.



(1.6)

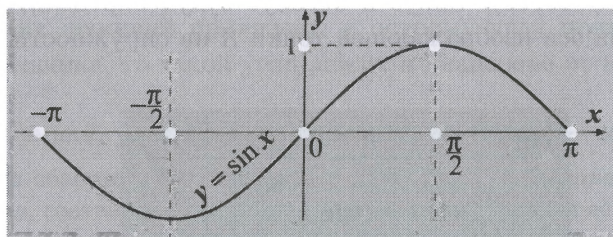
<sup>8</sup> А, в конце концов, даже *комплексные*.

Такое же расширение областей определения разумно предусмотреть и для тангенса/котангенса, которые становятся определёнными на  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  с выколотыми точками  $k\pi$  у *котангенса* и выколотыми точками  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  у *тангенса*<sup>9</sup>. Здесь  $k$  везде целое, т. е.  $k \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

Это, конечно, пробный шар. Первое, что приходит на ум. Как оно «выстрелит», будет видно. Но «выстреливает» идеально, что быстро выясняется. Манипулировать углами и функциями оказывается можно без предосторожностей.

### 1.3 Графики основных функций

Сконцентрируемся пока на функции  $y = \sin x$ . При положительном (против часовой стрелки) повороте *радиус-вектора* из начального положения<sup>10</sup> до угла  $x = \pi$  проекция конца вектора на вертикальную ось (*ось синусов*) меняется как изображено на рис. (1.7) волной над  $[0, \pi]$ . Полуволна ниже оси иксов отвечает поведению синуса на участке  $[-\pi, 0]$ .



(1.7)

Сказанное выше чрезвычайно важно. Смехотворно просто, но очень важно. Потому что, если сие не понять, любая встреча с синусами на жизненном пути будет вызывать в дальнейшем отрицательные эмоции. Поэтому, несмотря на простоту, необходимо уделить время, дабы **лично** разобраться и уложить в голове.

<sup>9</sup> Лучи, проходящие через указанные точки, не пересекают либо ось тангенсов, либо котангенсов.

<sup>10</sup> Нулевому углу отвечает горизонтальное положение *радиус-вектора*, направленного вправо.

В силу важности момента многие источники объясняют ход кривой (1.7) десятью способами. У большей части аудитории при этом переполняется чаша терпения. К тому же какие-то виды работ необходимо выполнять *самостоятельно*. Здесь как раз тот самый случай. Требуется не столько понять чужое объяснение, сколько выработать собственный стереотип мышления, способный справляться с синусами и единичной окружностью. Подобрать реперные точки по своему вкусу: синус нуля ноль,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $\sin \pi$  — опять ноль. Или проникая глубже<sup>11</sup>:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (1.8)$$

Далее. Прибавляя к любому углу  $x$  полный оборот, т. е.  $2\pi$ , мы оказываемся в том же положении, поэтому

$$\sin(x + 2\pi) \equiv \sin x, \quad (1.9)$$

т. е. синус периодичен<sup>12</sup> с периодом  $2\pi$ . График  $y = \sin x$  «уходит за горизонт» следующим образом.

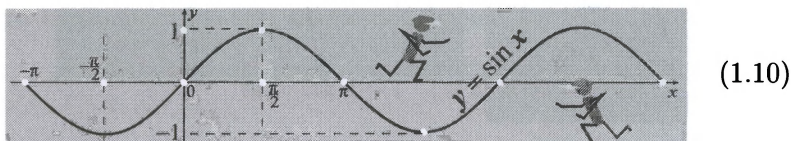
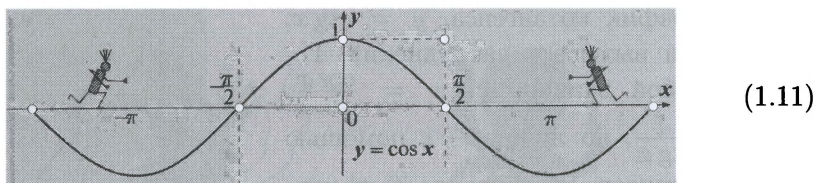


График косинуса,  $y = \cos x$ , — та же *синусоида* (1.10),



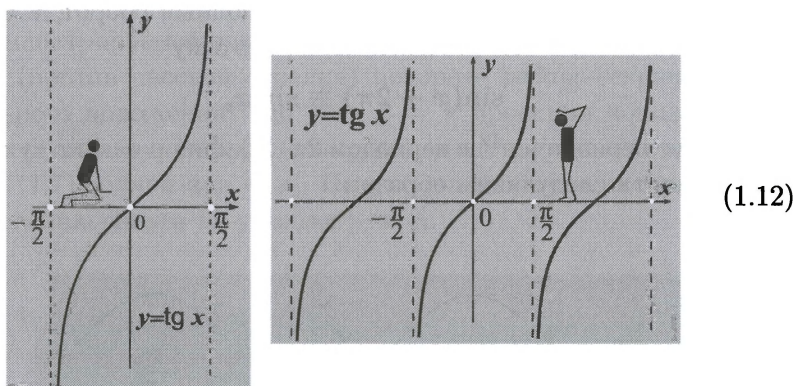
<sup>11</sup> Упражнение. Разберитесь, пожалуйста, со значениями (1.8) геометрически. Сначала рассмотрите прямоугольный треугольник с равными катетами, а потом из двух прямоугольных треугольников с углами  $30^\circ$  сложите равносторонний треугольник.

<sup>12</sup> Функция  $f(x)$ , удовлетворяющая тождеству  $f(x+T) \equiv f(x)$ , называется *периодической*, а  $T$  считается её *периодом*.

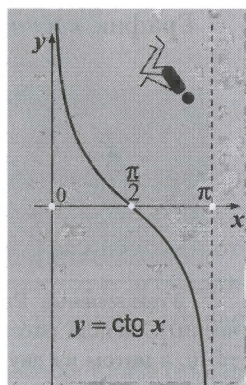


сдвинутая влево на  $\frac{\pi}{2}$ , что легко уяснить, контролируя проекцию на ось косинусов точки, движущейся по единичной окружности в положительном направлении. Круз по точкам типа (1.8) полагается в качестве упражнения.

График  $y = \operatorname{tg} x$  можно строить, отталкиваясь от представления  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , но удобнее следить за пересечением луча, фиксирующего угол  $x$ , с осью тангенсов. В пределах  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  график  $y = \operatorname{tg} x$  изображён слева на рис. (1.12). Он же периодически продолжен справа<sup>13</sup>. Период  $y$  тангенса получается равным  $\pi$ . (?)



Наконец, после всех вышеозначенных хлопот график котангенса,  $y = \operatorname{ctg} x$ , не должен вызывать затруднений. Годится любой вариант  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ,  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ , но лучше — с помощью оси котангенсов. В диапазоне  $[0, \pi]$  картинка  $y = \operatorname{ctg} x$  справа. Периодическое продолжение — на бумаге читателя.



<sup>13</sup> В точках  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , тангенс не определён.

## 1.4 Простейшие формулы

В треугольнике  $OAB$ , рис. (1.5), по *теореме Пифагора*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad (1.13)$$

поскольку длина гипотенузы равна единице, а катеты  $AB = \sin x$ ,  $OB = \cos x$ . Вообще говоря, (1.13) — тождество, его правильнее было бы писать в форме  $\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1}$ .

Но если мы займёмся буквоедством, то можем постепенно превратиться в роботов. Здесь, конечно, вопрос психологического свойства. Некоторые считают аккуратность обязательной и думают, что в ней только польза и от нее не может быть вреда. Давайте посмотрим. Равенство в математике используется по-разному. «Положим  $\lambda$  равным 1» — записывают иногда в виде<sup>14</sup>  $\lambda := 1$ , но большинству больше подходит «пусть  $\lambda = 1$ ». Фиксируя уравнение, пишут одно, думают другое: в « $2x - 1 = 0$ » левая часть не равна правой, а надо найти  $x$ , при котором равенство справедливо. Слава богу, что для обозначения ситуации не настаивают на использовании другого знака вместо « $=$ ». В тождествах вместо « $=$ » пишут « $\equiv$ ». Но как быть в случае

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 \quad (\equiv 1), \quad (1.14)$$

что «в некотором роде следует» из определения  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$ . «В некотором роде» — потому что в (1.14) надо исключить точки  $x = k\frac{\pi}{2}$  из-за неопределённости либо тангенса, либо котангенса.



Формально в перечисленных ситуациях надо было бы использовать разные значки, но тогда математические тексты превратились бы

<sup>14</sup> Знак « $:=$ » трактуется как присвоение значения параметру.



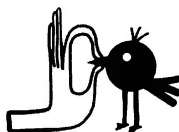
в компьютерные программы, пестрящие бисером завитушек. Человек всё-таки обычно понимает контекст, контролирует недосказанное, и эту его способность надо задействовать во избежание патологической скуки. Само собой, мы не ратуем за небрежность. Обе крайности плохи. Необходим баланс с учётом обстоятельств.

К простейшим формулам тригонометрии относят не только (1.13), (1.14), но и некоторые элементарные равенства, тривиально получаемые. Скажем, деление (1.13) на  $\cos^2 x$  даёт

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{или} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}. \quad (1.15)$$

Разумеется, здесь  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ . (?)

С точки зрения изобретательности тут и говорить не о чем, но соотношения типа (1.15), отложенные на задворках подсознания, иногда подталкивают мысль в продуктивном направлении. Например, тригонометрические уравнения бывает полезно трансформировать в уравнения, содержащие только тангенсы. Тут (1.15) может просигнализировать откуда-нибудь из-под ложки.

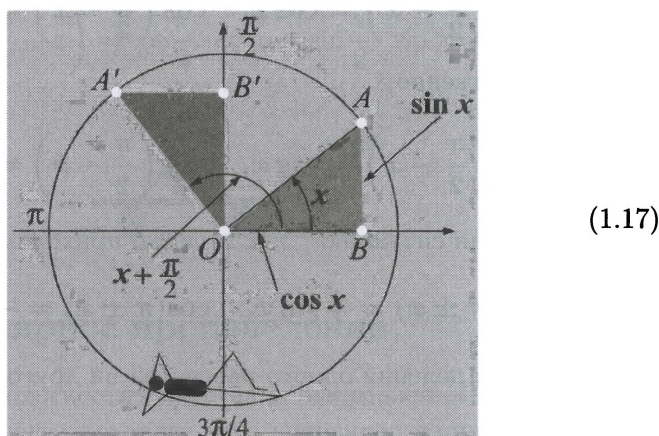


## 1.5 Формулы приведения

Мы уже отмечали, что график *косинуса*  $y = \cos x$  — та же самая *синусоида* (1.10), сдвинутая влево на  $\frac{\pi}{2}$ , т. е.

$$\sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right) = \cos x. \quad (1.16)$$

Получить тождество (1.16) проще всего, рассматривая геометрический образ (1.16) на единичной окружности.



(1.17)

Радиус-вектор  $OA$ , составляющий с осью косинусов угол  $x$ , поворачиваем на  $\frac{\pi}{2}$  в положение  $OA'$ . Геометрически ясно  $OB = OB'$ , что и означает (1.16). Из того же чертежа ясно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x. \quad (1.18)$$

Формулы приведения (1.16), (1.18) вытекают из (1.17) для  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , но они справедливы для любого  $x \in (-\infty, \infty)$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть аналогично ситуации для аргумента  $x$  из трёх других четвертей<sup>15</sup>.

Деля (1.16) на (1.18), получаем  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$ , что равносильно  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$ .

<sup>15</sup> Это не самый экономный способ, но на данном этапе лучше воспользоваться им, дабы не палить из пушек по воробьям. Кроме того, любые формулы приведения ориентируются на углы  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , для которых имеются таблицы тригонометрических функций.

Все такие трансформации называют *формулами приведения*. Тем же макаром легко получаются соотношения<sup>16</sup>

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Соответственно,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x.$$

Изображая ситуацию<sup>17</sup>  $\pi \pm x$ , легко приходим к<sup>18</sup>

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x, \quad \cos(\pi \pm x) = -\cos x,$$

что после деления одного равенства на другое даёт

$$\operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{ctg} x.$$

Тем же оружием шутя добываются соотношения

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \sin x,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \operatorname{tg} x.$$

Не дай бог, конечно, если кому-то придёт в голову все эти формулы запоминать. Или того хуже, фиксировать в виде шпаргалки на какой-либо драгоценной части тела, которую можно было бы использовать для другой надобности. *Формулы приведения* «выпрыгивают» сами собой, если радиус-вектор покрыть на единичной окружности<sup>19</sup>. Поначалу это можно делать на бумаге. Потом хватает воображения. А если опасаетесь, что

<sup>16</sup> Не считите за труд нарисовать чертёж, целебная сила которого заключается именно в том, что Вы его изобразите самостоятельно.

<sup>17</sup> Чертёж нарисовать самому проще, чем разбираться по чужому.

<sup>18</sup> Обратите внимание на смену  $\pm$  на  $\mp$ .

<sup>19</sup> Которая в тригонометрии служит «главным арифмометром».

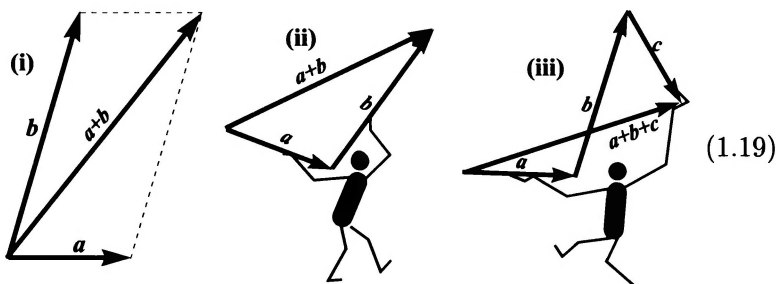
в неподходящий момент рука дрогнет, то, скажем,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  всегда можно вычислить как *косинус разности двух углов*<sup>20</sup>,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin x = \sin x.$$



## 1.6 Скалярное произведение

*Вектором* на плоскости<sup>21</sup> называют *направленный отрезок*  $\mathbf{a}$  — но это ещё не всё, см. далее. Все одинаково направленные векторы одинаковой длины  $a = |\mathbf{a}|$  считаются равными. Это позволяет передвигать  $\mathbf{a}$ , не меняя направления, в любое другое положение<sup>22</sup>. Поэтому, например, все векторы можно считать выходящими из одной точки. Но **самое важное**: векторы обязаны складываться по *правилу параллелограмма*, рис. (1.19) - (i),



эквивалентное *правилу треугольника*, (1.19) - (ii). Последнее удобнее при сложении нескольких векторов, (1.19) - (iii): каждый

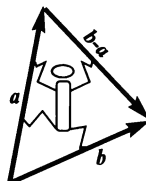
<sup>20</sup> До чего мы доберёмся уже в следующем разделе.

<sup>21</sup> А также в пространстве.

<sup>22</sup> Что характерно для идеологии *свободных векторов*. Когда существенна линия действия или точка приложения — теория делает реверанс и рассматривает исключения.

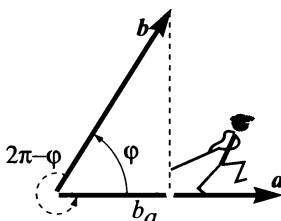
следующий вектор приставляется началом к концу предыдущего — замыкающий вектор даёт сумму.

Вычитание выводится из сложения:  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  определяется как вектор, который в сумме с  $\mathbf{a}$  даёт  $\mathbf{b}$ . Этому соответствует простой геометрический трюк: начала  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  совмещаются, а концы соединяются отрезком, направленным к  $\mathbf{b}$ , что и даёт разность  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ , см. рис. справа.



Далее. *Скалярное произведение* векторов определяется как произведение их длин на косинус угла между ними<sup>23</sup>,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \varphi.$$



$$(1.20)$$

Другими словами,  $\mathbf{ab}$  (точка в обозначении скалярного произведения часто опускается) есть произведение длины  $a$  на проекцию  $b_a$  вектора  $\mathbf{b}$  на вектор  $\mathbf{a}$ , т. е.

$$\mathbf{ab} = ab_a. \quad (1.21)$$

Таким образом, в силу (1.20), *скалярное произведение силы на пройденный путь равно произведённой работе*.

Скалярное произведение удовлетворяет обычным свойствам умножения:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}, \quad (\text{коммутативность})$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}. \quad (\text{дистрибутивный закон})$$

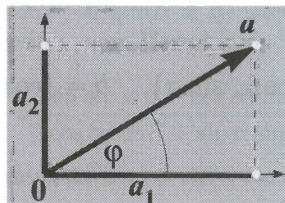
Первое — следствие чётности косинуса, второе вытекает из равенства проекции суммы векторов — сумме проекций. Поэтому векторные двучлены можно перемножать обычным образом:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{ac} + \mathbf{ad} + \mathbf{bc} + \mathbf{bd}. \quad (1.22)$$

<sup>23</sup> Из-за чётности и периодичности косинуса,  $\cos(2\pi - \varphi) = \cos \varphi$ , — не важно, как измеряется угол.

Обратимся теперь к записи векторов  $\mathbf{a}$  с помощью *декартовой системы координат*<sup>24</sup>,

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2\},$$



(1.23)

где  $a_1, a_2$  — координаты вектора  $\mathbf{a}$ .

Сумма векторов  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$  и  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2\}$  определяется как

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2\},$$

что равносильно сложению по *правилу параллелограмма*. (?)

Умножение на скаляр  $\lambda$ ,

$$\lambda \mathbf{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2\},$$

растягивает ( $|\lambda| > 1$ ) или сжимает ( $|\lambda| < 1$ ) вектор  $\mathbf{x}$ , не меняя направления при  $\lambda > 0$ , и меняет на противоположное при  $\lambda < 0$ .

Посмотрим, как в координатной записи выражается *скалярное произведение*. Направим по координатным осям единичные векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Тогда любые векторы  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$  и  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2\}$  можно записать в виде

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2,$$

откуда, в силу (1.22) и  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = 1$ ,  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0$ , получаем

$$\mathbf{x} \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad (1.24)$$

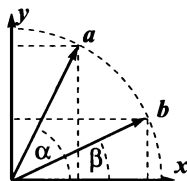
т. е. скалярное произведение  $\mathbf{x} \mathbf{y}$  есть сумма произведений одноимённых координат.

<sup>24</sup> Система координат со взаимно перпендикулярными осями.



Два способа вычисления ***xy*** позволяют извлекать выгоду. Например, произведение **единичных** векторов

$$\mathbf{a} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}, \quad \mathbf{b} = \{\cos \beta, \sin \beta\}$$



сразу даёт *формулу косинуса разности углов*

$$\mathbf{ab} = \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.} \quad (1.25)$$

Векторное описание треугольника



легко приводит к *теореме косинусов*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,}$$

так как  $\cos(\pi - C) = -\cos C$ .

## 1.7 Основные формулы

Ключевую формулу (1.25) мы уже получили. Из неё многое следует. Поменяв  $\beta$  на  $-\beta$  и учитывая чётность косинуса и нечётность синуса, получаем

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (1.26)$$

Воспользовавшись формулами приведения, имеем

$$\begin{aligned} \underline{\sin(\alpha + \beta)} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \\ &= \underline{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}, \end{aligned}$$

а также (после замены  $\beta$  на  $-\beta$ ):

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (1.27)$$

Располагая формулами  $\cos(\alpha \pm \beta)$  и  $\sin(\alpha \pm \beta)$ , легко получить формулы тангенса суммы и разности углов. Например,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta},$$

что после деления числителя и знаменателя на  $\cos \alpha \cos \beta$  даёт

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (1.28)$$

Перечислять возможности здесь нет смысла — формулы собраны в «Короткой справке», глава 5. Подобные списки в некоторых ситуациях полезно иметь под рукой. Потому что держать всё в памяти — не стоит<sup>25</sup>. В нормальном среднестатистическом варианте человек помнит формулы приблизительно, некоторые — точно, какие-то размыто. В случае крайней необходимости может оперативно вывести формулу — благо они выводятся в одно касание. Но на велосипедной скорости решения тригонометрических уравнений это всё же тормозит процесс. Поэтому шпаргалка поддерживает скорость, и в этом её позитивная роль. Но если шпаргалка используется как замена мозгов, последние постепенно атрофируются.

Двинемся дальше. При сложении формул  $\sin(\alpha + \beta)$  и  $\sin(\alpha - \beta)$  получается:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}. \quad (1.29)$$

Аналогичный фокус с формулами  $\cos(\alpha + \beta)$  и  $\cos(\alpha - \beta)$  даёт

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}, \quad (1.30)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}. \quad (1.31)$$

Полагая в полученных формулах  $\alpha = \beta$ , находим:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1.32)$$

<sup>25</sup> Но есть люди, у которых память удерживает многое сама по себе, против воли — тогда другой разговор.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (1.33)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (1.34)$$

Меняя в (1.33)  $\sin^2 \alpha$  на  $1 - \cos^2 \alpha$ , получим  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ , откуда

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad (1.35)$$

аналогично

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \quad (1.36)$$

Полагая в (1.30), (1.31),  $\alpha + \beta = x$ ,  $\alpha - \beta = y$ , получаем

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (1.37)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \quad (1.38)$$

Обыгрывая тем же способом формулу (1.29), имеем

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (1.39)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}. \quad (1.40)$$

Обратите внимание, выводя формулы, мы учимся здесь не только тригонометрии, но и умению манипулировать функциями, комбинировать их свойства, выбирать направление поиска. Примерно так же жонглирование помидорами помогает жонглированию огурцами. Второе сложнее, и нужно будет доучиться, но основы-то общие.

Продолжать начатое выше можно долго. Представляя, скажем,  $\cos 3\alpha$  как  $\cos(2\alpha + \alpha)$  и подключая (1.26), потом (1.32), (1.33), получим


$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha. \quad (1.41)$$

И вопрос в том, где остановиться. Потому что здесь простейшие манипуляции быстро переполняют чашу терпения. Посему пятак «теор-минимума» не следует выбирать слишком большим. Какой-то арсенал формул включается в школьную программу. Остальное выводится почти так же легко и составляет базу для сопутствующих задач.

## 1.8 Некоторые углы

Значения тригонометрических функций некоторых углов легко вычисляются и потому используются в качестве опорных точек. В первую очередь это углы  $k\frac{\pi}{2}$ , т. е.  $k \cdot 90^\circ$ , значения  $\sin$  и  $\cos$  в которых очевидны в силу предыдущего рассмотрения.

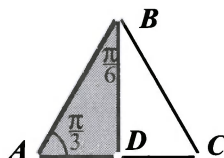
Геометрические соображения подсказывают значения синуса и косинуса для углов  $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ ,  $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ ,  $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ . В единичном

квадрате  треугольник  $ABC$  имеет острые углы по

$45^\circ$ , равные катеты и гипотенузу длины  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Поэтому

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1.42)$$

Рассмотрение равностороннего треугольника

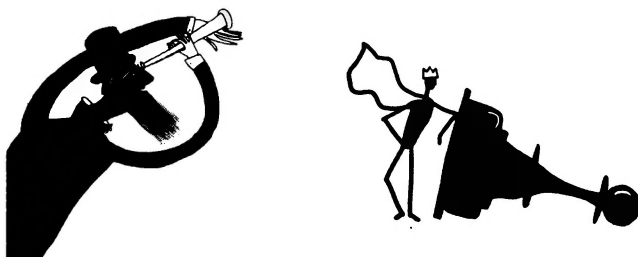


с единичной стороной и высотой  $BD$  определяет  $AD = \frac{1}{2}$ ,

$BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , откуда

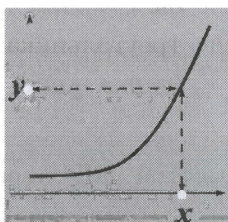
$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \quad (1.43)$$

Отталкиваясь от (1.42), (1.43), можно городить большой огород, комбинируя известные факты. Скажем,  $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$  — позволяет дать значения тригонометрических функций для угла  $\frac{7\pi}{12}$ , полагаясь на формулы для  $\cos(\alpha + \beta)$ ,  $\sin(\alpha + \beta)$ .



## 1.9 Обратные функции

Сначала два слова об обратных функциях вообще. Если  $y = x^5$ , то  $x = \sqrt[5]{y}$ . В этом случае зависимости (функции) называют взаимно обратными. Таким образом, если  $f$  — это возведение в 5-ю степень, то обратная функция  $f^{-1}$  — это извлечение корня 5-й степени. Для существования обратной функции существенна *монотонность*<sup>26</sup>  $f$ , обеспечивающая взаимную однозначность<sup>27</sup>.



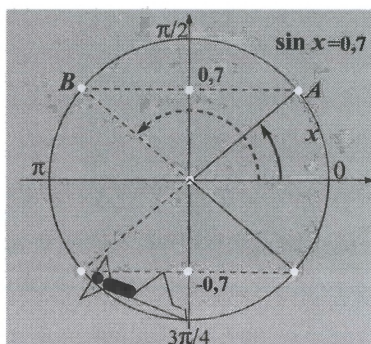
(1.44)

Теперь перейдём к тригонометрии. Зачем нужна обратная функция, скажем, к  $y = \sin x$ ? Да хотя бы затем, чтобы в случае

<sup>26</sup> Монотонность возрастания либо монотонность убывания.

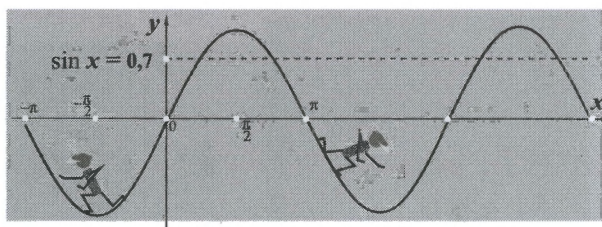
<sup>27</sup> По любой точке  $x$  на горизонтальной оси, рис. (1.44), вдоль пунктирного пути добираемся до  $y = f(x)$ . И наоборот, из  $y$  вдоль того же пути, но в обратном направлении, приходим в  $x = f^{-1}(y)$ . Разумеется, в отрыве от данной конкретной ситуации аргумент  $f^{-1}$  может обозначаться любой буквой. Поэтому иногда одновременно говорят об  $y = f(x)$  и об  $y = f^{-1}(x)$ , что парализует часть населения.

$\sin x = 0,7$  записать, чему равно  $x$ . На рисунке соответствующие дуги указать легко.



(1.45)

Но какую дугу  $OA$  или  $OB$  выбрать. Или указать обе? Не говоря о том, что к каждой можно прибавить сколько угодно полных оборотов  $2k\pi$ . Проблема на графике синусоиды, рис. (1.46), также очевидна. Горизонтальная пунктирная линия на уровне  $\sin x = 0,7$  пересекает синусоиду во многих точках.

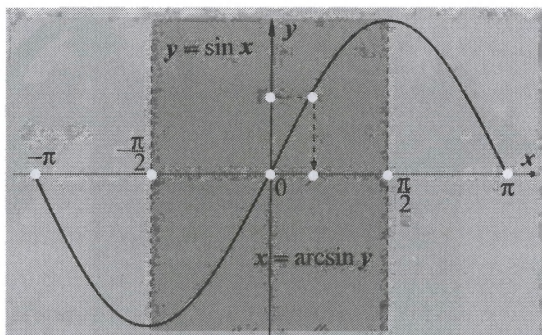


(1.46)

Получить в обычном смысле обратную функцию синусу можно сузив область определения  $\sin x$ , например, от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ . Тогда в поле зрения попадает лишь часть синусоиды в тёмном прямо-

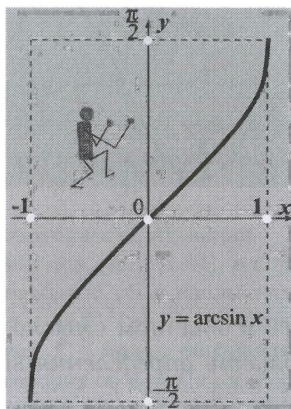


угольнике, рис. (1.47).



(1.47)

Здесь функция  $y = \sin x$  монотонно возрастает (взаимно однозначна) и потому имеет обратную функцию, которую принято обозначать как  $\arcsin$ . Тот же фрагмент синусоиды служит графиком *арксинуса*,  $x = \arcsin y$ , но тут несколько нарушен этикет. Аргумент принято обозначать буквой  $x$ , функцию — буквой  $y$ . Поменяв  $x, y$  местами на (1.47), получим уже график  $y = \arcsin x$ , но опять-таки в непривычном виде. Ось  $x$  идёт вверх, ось  $y$  — вправо. Остаётся повернуть картинку против часовой стрелки на  $90^\circ$ , а потом зеркально отразить относительно вертикальной оси. В итоге получится вот такой график  $y = \arcsin x$ .



(1.48)

У кого голова пошла кругом от всей этой чехарды, вернитесь<sup>28</sup> к (1.45) и, глядя на единичную окружность, повторяйте:

если  $\sin x = 0,7$ , то  $x = \arcsin 0,7$ ;

если  $\sin x = 0,3$ , то  $x = \arcsin 0,3$ ;

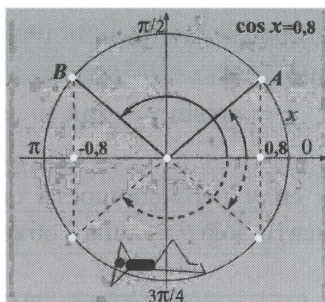
если  $\sin x = -0,5$ , то  $x = \arcsin(-0,5) \dots$

До тех пор, пока не почувствуете идиотизм происходящего. Тогда можно остановиться и прислушаться, как *арксинус* устраивается в недрах Вашего существа.

Одолов *арксинус*, справиться с  $\arccos$  и остальными «арками» уже легче. Для ситуации  $\cos x = \pm 0.8$  и вообще, когда

$$\cos x = \alpha, \quad \alpha \in [-1.1],$$

углы берутся в верхней полуплоскости<sup>29</sup>, т. е.  $\arccos x$  принимает значения на отрезке  $[0, \pi]$ .

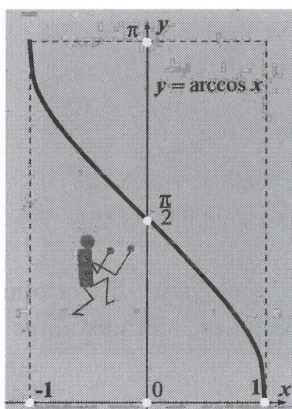


(1.49)

<sup>28</sup> Разумеется, после необходимого отдыха.

<sup>29</sup> Для обеспечения однозначности.

В итоге получается вот такой график  $y = \arccos x$ .



(1.50)

Задумаемся теперь, как записать ответ, если в процессе решения тригонометрического уравнения мы пришли к  $\cos x = \gamma$ . Конечно, годится  $x = \arccos \gamma$ . Но это только часть правды. Вся правда:

$$x = \pm \arccos \gamma + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

потому что, если годится  $x = \arccos \gamma$ , то устраивает и  $x = -\arccos \gamma$ , — проверьте по картинке (1.49).

В случае  $\sin x = \gamma$  ситуация немного сложнее. Подходит как

$$x = \arcsin \gamma, \quad \text{так и} \quad x = \pi - \arcsin \gamma, \quad (1.51)$$

плюс  $2k\pi$  в силу периодичности синуса<sup>30</sup>. Ответ готов, но его можно записать более изящно, объединив всё в одну формулу<sup>31</sup>

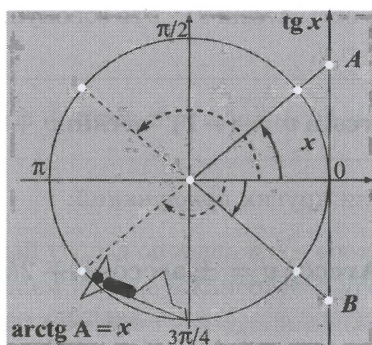
$$x = (-1)^k \arcsin \gamma + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.52)$$

<sup>30</sup> Проверьте по рисунку (1.45).

<sup>31</sup> Убедитесь, будьте добры, в правильности (1.52).

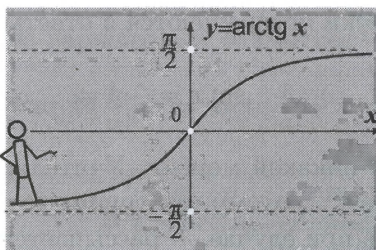
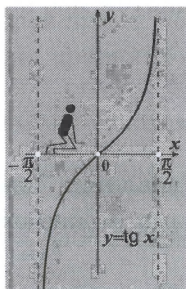
## 1.10 Арктангенс

Опираясь на предыдущий опыт, с *арктангенсом* можно разделиться в одно касание<sup>32</sup>.



(1.53)

Берём  $y = \operatorname{tg} x$  на участке  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , рис. (1.54) слева, меняем  $x, y$  местами, далее поворотом и отражением приводим оси в обычное положение. Получается график  $y = \operatorname{arctg} x$ , рис. (1.54) справа.



(1.54)

В случае  $\operatorname{tg} x = \gamma$  полный ответ:

$$x = \operatorname{arctg} \gamma + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Арккотангенс* — в качестве упражнения.

<sup>32</sup> Недаром на сайте [oschool.ru](http://oschool.ru) мы не один раз подчёркиваем, что осваивая *танго*, полезно учиться танцевать вообще. Ламбада потом легче даётся. Да и с математикой такая штука обычно приключается. Бьёшься головой об стену, бьёшься, а потом вдруг оно... как будто с тормозов кто-то снял.

## 1.11 Аркфункции с большой буквы

Говорят, троечники придумали многозначную функцию  $\text{Arcsin } x$  вместо  $\arcsin x$ . Очень удобная вещь. Полным решением уравнения  $\sin u = v$  является  $u = \text{Arcsin } v$ , и о чехарде (1.52) можно забыть. То есть  $\text{Arcsin } v$  — это совокупность всех решений  $u$  уравнения  $\sin u = v$ ,

$$\text{Arcsin } v = (-1)^k \arcsin v + k\pi. \quad (1.55)$$

Аналогично для других *аркфункций*:

$$\text{Arccos } v = \pm \arccos v + 2k\pi, \quad (1.56)$$

$$\text{Arctg } v = \arctg v + k\pi, \quad (1.57)$$

$$\text{Arcctg } v = \text{arcctg } v + k\pi, \quad (1.58)$$

где  $k$  везде целое, т. е.  $k \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

Часть населения по поводу «Арксинуса» ликует, ибо задачи фактически превращаются в ответы,

$$\sin x = \zeta \quad \Rightarrow \quad x = \text{Arcsin } \zeta,$$

и всё! И никакой мороки. Учительствующая коалиция сожалеет и охает<sup>33</sup>, потому что группа задач, которыми можно ох как насолить при случае, — рассыпается в пыль.

## 1.12 Метод вспомогательного угла

На практике полезен следующий трюк.

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right).$$

---

<sup>33</sup> И требует запретить, дабы мы были в смятении, а они — в белом.

Полагая далее<sup>34</sup>

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi, \quad (1.59)$$

получаем возможность представить  $a \sin x + b \cos x$  в виде



$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \quad (1.60)$$

где вспомогательный угол  $\varphi$  определяется соотношениями (1.59). Но указывать в общем случае в качестве  $\varphi$  угол

$$\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{или} \quad \varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



было бы **ошибочно**. Соотношения (1.59), определяя знаки синуса и косинуса, задают *четверть* единичной окружности<sup>35</sup>, которой принадлежит  $\varphi$ . Поэтому, осознав номер четверти, угол  $\varphi$  можно правильно выбрать из вариантов  $\varphi = \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

С тем же успехом — из  $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{b}{a} + \pi$ . Наконец, возможен выбор из:

$$\varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \varphi = \pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Вместо (1.59) с тем же успехом можно положить

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad (1.61)$$

<sup>34</sup> Что возможно благодаря

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

<sup>35</sup> На рис. (1.5) номера четвертей указаны римскими цифрами.

что приводит к



$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi). \quad (1.62)$$

Какой из вариантов (1.60), (1.62) удобнее — зависит от решаемой задачи.

Преобразование (1.60) представляет собой инструмент решения многих задач. Из (1.60) следует, что  $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$  — это максимум и минимум функции  $a \sin x + b \cos x$ . Решением уравнения

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad (1.63)$$

в силу (1.60) и (1.52), является

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \varphi + k\pi,$$



где  $k \in \mathbb{Z}$ , а  $\varphi$  определяется соотношениями (1.59). Разумеется,  $c$  обязано удовлетворять условию  $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ . В случае  $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$  уравнение (1.63) решения не имеет.

Наконец, ухищрение (1.60) играет важную роль в сложении гармонических сигналов, о чём речь далее.

## Глава 2

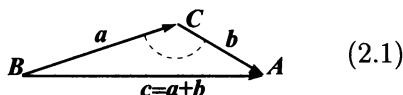
# Приложения к геометрии и физике

*A not getting what you want  
is sometimes a stroke of luck.*  
Dalai Lamas

### 2.1 Теорема косинусов

*Теорема косинусов*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

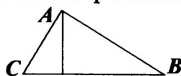


получена в разделе 1.6 простым скалярным возведением в квадрат векторного равенства  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ . При этом стоит обратить внимание, что векторные инструменты на своём этаже изящно справляются с различными конструкциями, которые неуклюже выглядят на других уровнях. И дело не только в краткости. Дело в том, что векторный аппарат позволяет охватить результат единым взором. Охватить как элемент, атом, — который одним махом проскакивает в голову и удобно там располагается. А источник вывода, причина, — лежит на виду и постоянно сигнализирует,

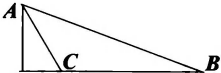


позволяя в любой момент воспроизвести логическую цепочку, ведущую к цели.

Сей вывод с помощью *скалярного произведения* полезно сопоставить с рутинным доказательством сугубо геометрического толка, где наравне с манипулированием чертежом



приходит-

ся мудрить ещё и с . Там тоже всё просто, но не возникает цельного представления о добытом факте. Вместо причины чудится удача, случайная находка.

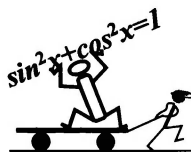
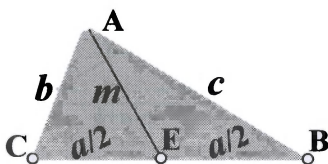
Теорема косинусов (2.1) применяется в геометрии довольно часто. Рассмотрим несколько примеров.

- Из (2.1) сразу следует

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad (2.2)$$

т. е. по трём сторонам треугольника сразу вычисляются все углы. Хитрость, конечно, невелика, но мысль часто костенеет, и её полезно упражнять, рассматривая экспонаты с разных сторон.

- На рисунке



(2.3)

$m$  — медиана треугольника  $ABC$ . По теореме косинусов для  $\triangle AEC$ :

$$m^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ab \cos C,$$

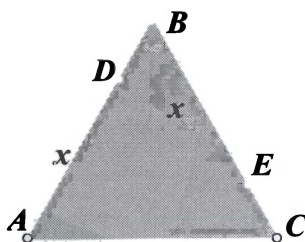
что после подстановки косинуса (2.2) и косметических преобразований приводит к формуле вычисления медианы по трём сторонам:

$$m^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

- Другая формула для медианы в той же ситуации (2.3):

$$m^2 = \frac{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}{4}. \quad (?)^1$$

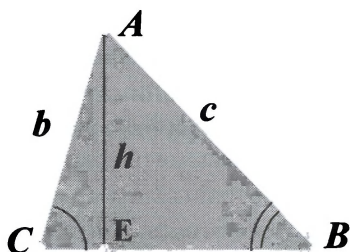
- В равностороннем треугольнике  $ABC$  со стороной  $a = 7$  расстояние  $CE = 2$ , а точка  $D$  на  $AB$  выбрана так, что  $AD = DE$ ,



найти  $DE$ .  $(?)$

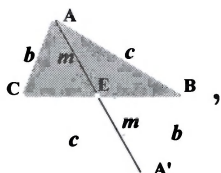
## 2.2 Теорема синусов

В треугольнике  $ABC$  высоту  $h$  можно вычислить двумя способами, как  $h = b \sin C$  и как  $h = c \sin B$ .



(2.4)

<sup>1</sup> Достройте треугольник (2.3) до параллелограмма



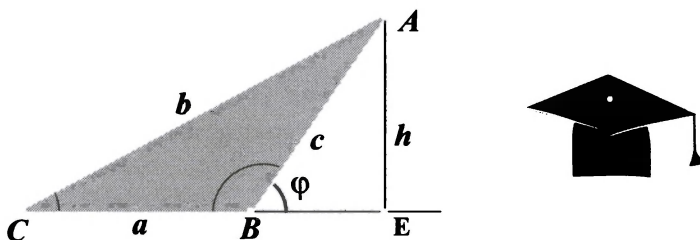
выпейте чашечку кофе, подмигните коту Мурзику, а потом уже завершайте доказательство. Если не получается — валите всё на Мурзика.

Но из  $b \sin C = c \sin B$  следует  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ . То же самое можно проделать с парой  $\{a, b\}$  или  $\{a, c\}$ . Поэтому

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad (2.5)$$

что называют *теоремой синусов*.

Всё ли мы с Вами аккуратно доказали? Не совсем. Вместо (2.4) мы могли бы столкнуться с ситуацией,

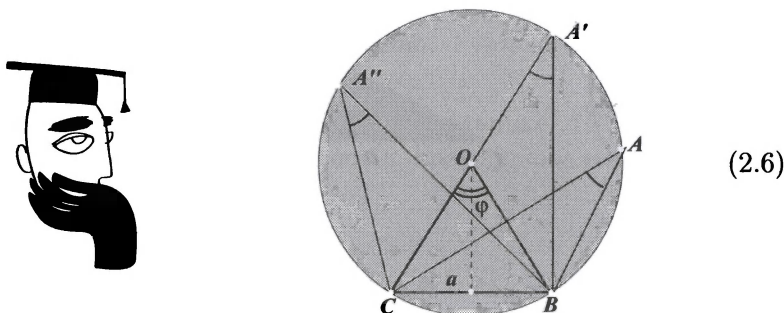


где  $h = c \sin \varphi$ , а не  $h = c \sin B$ . Правда, вернуться в ту же колею можно, заметив, что  $\sin \varphi = \sin(\pi - B) = \sin B$ . Но такими оговорками лучше заниматься потом, что мы и делаем. Когда главное улеглось в голову. Иначе трясина подробностей не даст разобраться, где существенное, а где второстепенное. Соблюдение мелких формальностей мешает воспринимать математику. Маскирует суть, нивелирует акценты, дурачит публику.



Теперь к (2.5) можно внимательнее присмотреться. Постоянство отношения стороны к противолежащему углу подталкивает к мысли, что за этим что-то кроется. Если фиксируем сторону  $a = BC$ , то у всех треугольников с одним и тем же углом  $\angle A$  вершины  $A$  будут лежать на описанной окружности около  $\triangle ABC$ ,

рис. (2.6). Поэтому ясно, что отношение  $\frac{a}{\sin A}$  как-то связано с радиусом  $R$  описанной окружности.



Точки над  $i$  расставляются просто. Все углы  $\angle A, \angle A', \angle A''$  — равны половине центрального угла  $\varphi$ , опирающегося на ту же дугу<sup>2</sup>  $BC$ . Отсюда  $a = BC = 2R \sin \frac{\varphi}{2} = 2R \sin A$ . Следовательно, к (2.5) можно добавить:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \quad (2.7)$$

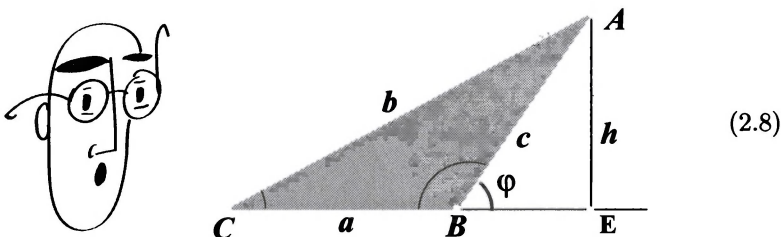
## 2.3 Геометрия треугольников

Планиметрия, да и стереометрия имеют дело с фигурами и телами, характеризующимися углами и отрезками прямых, которые находятся во взаимодействии друг с другом. Взаимодействие отслеживают тригонометрические инструменты. Поэтому решение геометрических задач обычно пестрит синусами и косинусами. Удивительно, что уже простейшая фигура — треугольник — выступает в роли бесконечного разнообразия идей.

• *Элементарная задача: по двум сторонам и углу между ними найти площадь треугольника* — решается шутя.

<sup>2</sup> Равенство  $\angle A' = \frac{\varphi}{2}$  усматривается сразу. Для осознания  $\angle A = \frac{\varphi}{2}$  достаточно провести диаметр через  $OA$ , а угол  $\angle A$  представить как разность углов  $OAB$  и  $OAC$ .

◀ Высота  $h$ , рис.(2.8), определяется как<sup>3</sup>  $h = b \sin C$ .



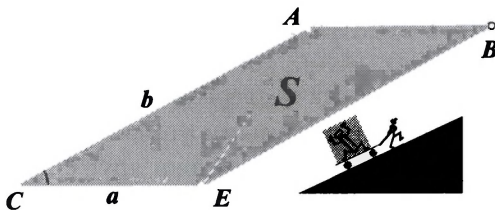
Поэтому

$$S = \frac{1}{2}ah \Rightarrow S = \frac{1}{2}ab \sin C. \quad \blacktriangleright \quad (2.9)$$

Формула (2.9) входит в стандартный арсенал предметов первой необходимости, и её обычно твёрдо помнят. В отличие от вывода, что странно. Потому что доказательство здесь проще заключения. А в таких случаях, особенно в таких, полезно фокусироваться в первую очередь на рассуждениях, ведущих к цели. И тогда формулы в голове оживают, а не лежат мёртвым грузом.

Из (2.9) следует формула для площади параллелограмма

$$S = ab \sin C.$$



• *Площадь треугольника по трём сторонам* также определяется на основе (2.9) с опорой на рецепт вычисления косинуса (2.2). Учитывая при этом, что

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2,$$

<sup>3</sup> Независимо от того, как выглядит треугольник.

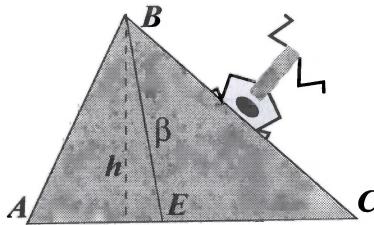
после утомительных, до некоторой степени, преобразований получаем *формулу Герона*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (2.10)$$

где  $p = \frac{a+b+c}{2}$  — *полупериметр*.

• Биссектриса  $\beta$  угла  $B$  в треугольнике  $ABC$  делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}. \quad (2.11)$$



◀ Площади треугольников  $ABE$  и  $CBE$ , с одной стороны, относятся как  $\frac{AE}{EC}$ , поскольку у них одна и та же высота  $h$ , с другой —

$$\frac{S_{ABE}}{S_{CBE}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot \beta \cdot \sin \frac{B}{2}}{\frac{1}{2}BC \cdot \beta \cdot \sin \frac{B}{2}} = \frac{AB}{BC},$$

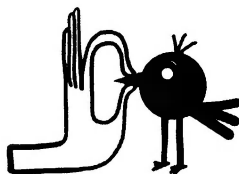
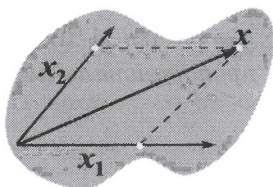
что и приводит к заключению (2.11). ►

Сам результат (2.11) — чисто геометрический, но по ходу дела (основания) удобно действовать тригонометрически.

## 2.4 Разложение сил и скоростей

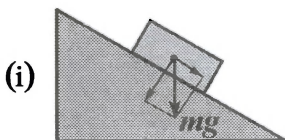
Операция *разложения вектора* по двум (на плоскости) или по трём (в пространстве) направлениям хорошо известна из физики (разложение сил, скоростей на несколько составляющих) и заключается в построении подходящего параллелограмма (либо

параллелепипеда) с последующим представлением диагонали в виде векторной суммы сторон. Чистый математик о силах и скоростях слышать не хочет и задачу разложения вектора по направлениям воспринимает формально. Как задачу определения *косугольных координат*  $x_1, x_2$  вектора  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$ , рис. (2.12).

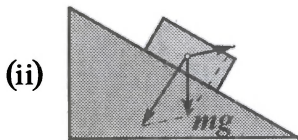


(2.12)

На этом пути никто особых трудностей не встречает. Но выход в реальный мир сталкивается иногда с препятствиями того или иного калибра. Стандартное разложение веса тела, скользящего или застывшего на наклонной плоскости, рис. (2.13) - (i), привычно и вроде бы беспроблемно. Сила нормального давления на плоскость опоры  $F = mg \cos \varphi$ , если  $\varphi$  — угол наклона.



(i)



(ii)

(2.13)

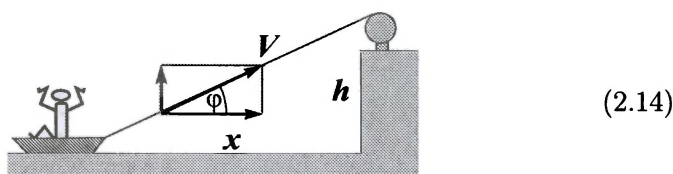
Но что если вместо «скатывающей составляющей» взять другую, (2.13) - (ii)? Составляющая нормального давления меняется. Как быть? Некоторые теряются. Хотя тут семи пядей во лбу быть не требуется. Просто взятая от фонаря составляющая не параллельна плоскости, и её ортогональный ингредиент необходимо учитывать при определении нормальной реакции опоры. Именно поэтому направления разложения выбирают ортогональными.

Вот другая задача, от которой у большей части европейского населения перегорают предохранители.

• Лодка подтягивается к берегу лебёдкой, установленной на высоком берегу. Верёвка вытягивается со скоростью  $V$ . С какой

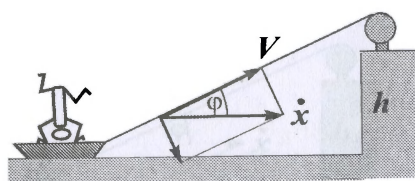


скоростью<sup>4</sup>  $\dot{x}$  лодка плывёт к берегу?



(2.14)

Обычно  $V$  раскладывают на составляющие по образцу (2.14), получая скорость лодки  $\dot{x} = V \cos \varphi$ , — но это неправильно. Раскладывать  $V$  надо иначе. Точнее говоря, раскладывать надо скорость лодки:



(2.15)

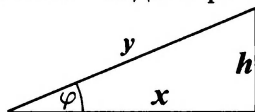
В итоге правильное решение  $\dot{x} = \frac{V}{\cos \varphi}$ , что у многих вызы-

зывает сомнение, поскольку для определения горизонтальной силы, действующей на лодку, натяжение верёвки надо раскладывать как раз по схеме (2.14). Так что здесь сам чёрт ногу сломит.

Это хорошая задача для тренировки физического чутья и адекватного восприятия действительности. По крайней мере она даёт повод задуматься о бдительности при разложении сил и скоростей.

С помощью производных\* задача решается совсем просто.

Если в треугольнике



гипотенуза  $y(t)$

уменьшается со скоростью  $\dot{y} = V$ , то в силу  $y = \sqrt{x^2 + h^2}$ , имеем

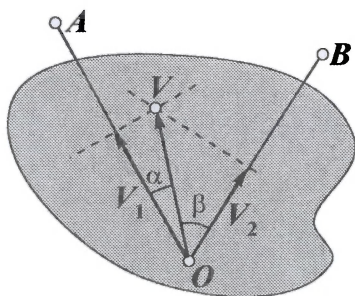
<sup>4</sup> Кто не знаком пока с производными, воспринимайте «икс с точкой» просто как обозначение скорости лодки.



$$\dot{y} = \frac{2x\dot{x}}{2\sqrt{x^2 + h^2}}, \quad \text{откуда} \quad \boxed{\dot{x} = \frac{\dot{y}}{\cos \varphi}}.$$

На фоне приобретённого выше опыта следующая задача идеологически понятна, но во избежание недоразумений снабжаем её всё-таки звёздочкой.

**Задача\*.** Лодку, находящуюся в точке  $O$ , подтягивают к берегу двумя верёвками из точек  $A$  и  $B$ , рис. (2.16). Верёвки вытягиваются со скоростями  $V_1$  и  $V_2$ . Угол  $AOB = \varphi$ . С какой скоростью  $V$  движется лодка?



(2.16)

◀ Можно биться об заклад, что ЦРУ поголовно предложат в качестве решения диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $V_1$  и  $V_2$ . Недосмотр, конечно, зевок.

Правильное решение совсем другое, непривычное. Но в русле решения задачи (2.15) более-менее понятное. Через концы векторов  $V_1$  и  $V_2$  надо провести перпендикуляры к  $AO$  и  $BO$  — точка их пересечения даст конец вектора  $V$ . Углы  $\alpha, \beta$  можно определить из системы уравнений

$$\frac{V_1}{\cos \alpha} = \frac{V_2}{\cos \beta}, \quad \alpha + \beta = \varphi.$$

Величина искомой скорости  $V = \frac{V_1}{\cos \alpha}$ . ▶

## 2.5 Гармонические сигналы

Со школьной колокольни кажется, что тригонометрия сотворена для борьбы с треугольниками и иже с ними. В значительной мере это так. Но несравнимо большее значение тригонометрические инструменты имеют для теории колебаний. А если учесть, что всё вокруг колеблется, становится ясна фундаментальная роль синусов во Вселенной.

Итак, о колебаниях. Функцию  $f(t)$  называют *периодической* с *периодом*  $\tau$ , если

$$f(t + \tau) \equiv f(t).$$

Одним из эталонов периодического сигнала служит *синусоида*, имеющая период  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.17)$$

где  $A$  — *амплитуда*, аргумент синуса  $(\omega t + \varphi)$  — называют *фазой*,  $\varphi$  — *сдвиг по фазе*,  $\omega$  — *круговая частота*<sup>5</sup>. Функцию (2.17) называют *гармоническим сигналом*. Понятно, что замена в (2.17) синуса на косинус равносильна сдвигу по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  — и потому не меняет природу сигнала.

При сложении двух гармоник,

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \quad (2.18)$$

получается снова гармонический сигнал вида (2.17) с амплитудой  $A$ , определяемой соотношением<sup>6</sup>

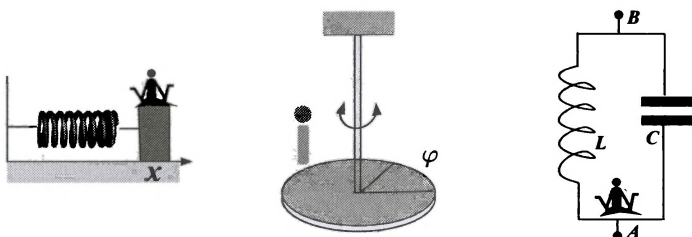
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2.19)$$

и некоторым сдвигом по фазе. Зависимость амплитуды суммарного сигнала от разности фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  представляет собой широко известное

<sup>5</sup> Где  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $\nu = \frac{1}{\tau}$  — обыкновенная частота,  $\tau$  — *период колебания*.

<sup>6</sup> Вывод (2.19) из (2.18) предлагается в качестве упражнения.

явление *интерференции*.



**Резонансные явления.** *Резонансом* называют феномен резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешнего гармонического воздействия к частоте собственного колебания системы.

При воздействии гармонического возмущения  $f \cos \omega t$  на осциллятор с собственной частотой колебания  $\omega_0$ , решением оказывается гармоническое колебание

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.20)$$

с амплитудой<sup>7</sup>

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}, \quad (2.21)$$

нарастающей при  $\omega \rightarrow \omega_0$ , а при малом «коэффициенте трения»  $\gamma$  нарастающей катастрофически.

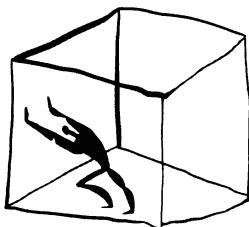
Распространённое «правило» возникновения резонанса при частоте воздействия кратной собственной частоте  $\omega = k\omega_0$ , вообще говоря, неверно. Оно работает, если в разложении  $f(t)$  присутствует ощутимая гармоника с  $\omega = \omega_0$ . Например, в случае

$$f(t) = \cos 3\omega_0 t + \cos 7\omega_0 t$$

частота воздействия совпадает с резонансной, но резонанса нет.

<sup>7</sup> Что выясняется при решении дифференциальных уравнений, но этот разговор остаётся у нас за кадром, см. «Начала математического анализа».

**Упражнение.** Проверьте, что функция  $\cos 3t$  имеет период  $\frac{2\pi}{3}$ , у  $\cos 7t$  — период  $\frac{2\pi}{7}$ , а у  $\cos 3t + \cos 7t$  — период  $2\pi$ .



## Глава 3

# Задачи и решения

*Путь наверх — есть путь отказа,  
Колдовство!  
Ох, и спрятано, зараза,  
Естество.*

Решение задач — краеугольный камень учебного процесса.

### 3.1 Преобразования и тождества

Бесконечное разнообразие музыкальных мелодий возникает из комбинаций «семи нот». Такое же многообразие тригонометрических фокусов базируется на хитросплетениях горстки элементарных формул. Искусство решения задач тут заключается именно в умении комбинировать и замечать.

• Доказать :

$$\text{!} \sim \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}. \quad (?) \quad (3.1)$$

◀ Жонглируя формулами произведения (1.29) — (1.31), имеем

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \sin 80^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \cos 20^\circ \sin 80^\circ - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin 100^\circ + \sin 60^\circ}{2} - \frac{1}{2} \sin 80^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{8},$$

где учтено  $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$  в силу  $\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$ . ▶

• Проверить :

$$! \quad \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}. \quad (?) \quad (3.2)$$

◀ Умножим и разделим (3.2) на  $2 \sin 20^\circ$ . Тогда, в силу (1.32),

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{4 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{1}{8}. \quad \blacktriangleright$$

Задача (3.2) психологически несколько сложнее предыдущей, поскольку перед применением стандартных формул здесь надо догадаться видоизменить условие домножением на  $\frac{2 \sin 20^\circ}{2 \sin 20^\circ}$ , после чего всё идёт как по маслу. Конечно, хитрость невелика. Но возможность принять другую стойку, прежде чем двигаться, полезно всегда иметь в виду.

Разумеется, обе задачи (3.1), (3.2) могли быть сформулированы как задачи на вычисление, будь убраны из правых частей «ответы»:  $\frac{\sqrt{3}}{8}$  и  $\frac{1}{8}$ . В любом случае инструментом служит комбинирование формул. Отличаться могут цели и выводы. Вот пример доказательства тождества:

$$\bullet \sin 2\alpha (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) = 4 \operatorname{ctg} 2\alpha. \quad (?.) \quad (3.3)$$

◀ Преобразуем<sup>1</sup>

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{4 \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \frac{4 \operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin 2\alpha},$$

откуда, после умножения<sup>2</sup> на  $\sin^2 \alpha$ , и получается (3.3). ►



Из примеров ясно, что формулы тригонометрии хорошо иметь в голове, а не на бумаге, куда надо то и дело заглядывать. Потому что решение задач связано всё-таки с поиском, желательно осмысленным. Чтобы формулы в памяти подсказывали выбор пути. Конечно, если не подсказывают, приходится нащупывать вслепую, действуя тупым перебором. Но и тогда тригонометрические стандарты в извилинах ума предпочтительнее компактной шпаргалки, ибо значительно экономят время. На первых порах, разумеется, шпаргалка играет позитивную роль. Когда в неё надоедает окуна́ться, «Бегемотик подсознания» начинает спешно запоминать необходимое.

---

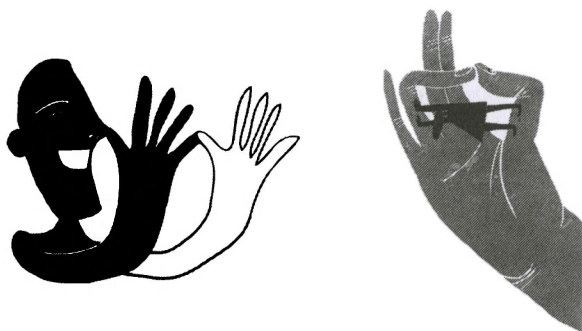
<sup>1</sup> Далее мы пользуемся тождеством

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

которое следует из  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  с учётом  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .

<sup>2</sup> Законность умножения на  $\sin^2 \alpha$  следует из  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ , что вытекает из самой записи условия (3.3), в котором фигурируют  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ .





Составляя задачу, автор чаще всего какую-либо тривиальность последовательно преобразует в нечто многозначительное на вид. В таком случае, решая задачу, т. е. двигаясь в обратном направлении, естественно вытягивать преобразования в строчку. Однако более сложные головоломки конструируют другим способом. Разные пустячки преобразуют параллельно, а потом из полученных элементов «склеивают» проблему. И тут уже лентой трансформаций не обойдёшься. Действовать приходится тоже параллельно, стартуя из разных точек. Вот относительно простой пример на эту тему.

- Пусть углы  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  в сумме дают  $\frac{\pi}{2}$ . Тогда

$$! \quad \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta + \text{tg } \beta \text{ tg } \gamma + \text{tg } \gamma \text{ tg } \alpha = 1. \quad (?) \quad (3.4)$$

◀ С одной стороны,

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \text{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \frac{1}{\text{tg } \gamma},$$

с другой,

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta}.$$


Поэтому

$$\frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta} = \frac{1}{\text{tg } \gamma},$$


что после умножения на  $\text{tg } \gamma(1 - \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta)$  приводит к (3.4). ►

## Упражнения

*Доказать:*


$$\bullet \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.5)$$


$$\bullet 4 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5} = 1. \quad (3.6)$$





$$\bullet \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}. \quad (3.7)$$

$$\bullet \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}. \quad (3.8)$$

$$\bullet \frac{2 \sin \varphi - \sin 2\varphi}{2 \sin \varphi + \sin 2\varphi} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (3.9)$$

$$\bullet \sin \varphi + \sin \left( \frac{2\pi}{3} + \varphi \right) + \sin \left( \frac{4\pi}{3} + \varphi \right) = 0. \quad (3.10)$$




$$\bullet \sin 2\theta = \sqrt{2} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{8} + \theta \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{8} - \theta \right) \right]. \quad (3.11)$$

## 3.2 Уравнения и системы уравнений

$$\bullet \quad \sin x \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{4}. \quad (?) \quad (3.12)$$

◀ Опираясь на (1.31), получаем

$$\sin x \sin \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} - \cos \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, (3.12) равносильно  $\cos \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$ , откуда следует

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Не заметив какой-либо мелочи, легко заблудиться. Так что, решая задачи, надо смотреть в оба. Вот характерный пример.

• Решить систему уравнений\*:

$$! \sim \begin{cases} \sin x - \sin y = y - x, \\ x + y^2 = 2. \end{cases} \quad (?) \quad (3.13)$$

◀ Функция  $x + \sin x$  везде *строго монотонно возрастает*<sup>3</sup>. Поэтому, если первое уравнение (3.13) переписать в виде  $x + \sin x = y + \sin y$ , становится ясно, что  $x = y$ . Но тогда второе уравнение переходит в квадратное  $x^2 + x - 2 = 0$ , корни:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ . Решение (3.13):

$$(x_1, y_1) = (-2, -2), \quad (x_2, y_2) = (1, 1). \quad \blacktriangleright$$

---

<sup>3</sup> Из-за возможного незнания этого факта на систему (3.13) поставлена звёздочка. Не знают могут те, кто ещё не ознакомился с *производными*, см. «Начала математического анализа». Возрастание  $x + \sin x$  следует из того, что производная  $(x + \sin x)' = 1 + \cos x \geq 0$ , причём обнуляется только в изолированных точках.

### 3.3 Замена переменных

Обобщённо говоря, решение уравнений всегда основывается на их трансформации в форму, удобную для нанесения «последнего удара». Способы трансформации бывают разные. Вот кое-что из примелькавшегося.

Чаще всего используется замена переменных. Уравнение

$$\text{!} \bullet \sin 2x - \sin x - \cos x + 1 = 0 \quad (3.14)$$

при бесхитростном подходе толкает в бурелом формул. Замена

$$\boxed{\sin x + \cos x = t} \quad (3.15)$$

в силу

$$\sin 2x = t^2 - 1,$$

переводит (3.14) в квадратное уравнение

$$t^2 - t = 0,$$

корни которого  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$ . Следовательно<sup>4</sup>,

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Замена (3.15) наравне с « $\sin x - \cos x = t$ » используется часто. Не потому, что соответствующий фокус заложен в устройстве мироздания, а потому, что рецепт популярен у составителей задач для маскировки всяких банальностей. Распутывать клубок обратно приходится, пользуясь тем же ключом шифрования.

Лекалами замены нередко служат формулы (1.35), (1.36), т. е.

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}. \quad (3.16)$$

<sup>4</sup> В ситуациях « $x = \dots + k\pi$ », « $\dots + 2k\pi$ » — везде подразумевается  $k \in \mathbb{Z}$ .

Это помогает в ситуациях типа

$$a \cos^2 x + b \sin^2 x + c \cos 2x + d = 0. \quad (3.17)$$

Замена

$$\text{!} \quad \boxed{\cos 2x = t} \quad (3.18)$$

сводит (3.17) к квадратному уравнению. Далее без проблем.

Замена (3.18) работает и в более сложных ситуациях, где усложнения компенсируются спецификой уравнения. Скажем,

$$\text{!} \quad \cos 2x + \sin^4 x - 2 \cos^6 x = 0,$$

благодаря подбору коэффициентов, подстановкой  $\cos 2x = t$  сводится к уравнению  $t^3 + 2t^2 + t = 0$ . Сразу определяется корень  $t_1 = 0$ , откуда

$$\cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},$$

и ещё два совпадающих корня  $t_{2,3} = -1$ , что к предыдущему добавляет

$$\cos 2x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Та же подстановка  $\cos 2x = t$  переводит

$$\text{!} \quad \sin^6 x + \cos^6 x = 1$$

в уравнение

$$\left(\frac{1-t}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+t}{2}\right)^3 = 1,$$

переходящее после элементарных преобразований в  $t^2 = 1$ , т. е.

$$\cos 2x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2}.$$

Широко используется универсальная замена через тангенс половинного угла



$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,} \quad (3.19)$$

переводящая все тригонометрические функции в дробно-рациональные выражения от  $t$ . Для этого достаточно выразить через  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  основные функции:

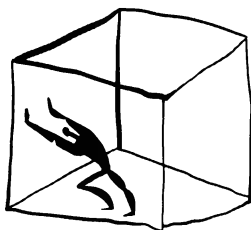
$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Такая замена переводит почти любое уравнение в алгебраическое относительно  $t$ . Но это, конечно, не панацея. Хотя бы потому, что уравнения степени  $n > 2$  решаются лишь от случая к случаю.

Перечисленные замены популярны, но не единственны. В рутинных задачах, правда, дело не доходит и до такого уровня. Но в задачах повышенной сложности авторы пытаются заминировать условия чем-либо новеньким — и там надо смотреть шире.



## 3.4 Однородные уравнения

Уравнение

$$! \rightsquigarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0 \quad (3.20)$$

делением на  $\cos^2 x$  переводится<sup>5</sup> в квадратное относительно  $\operatorname{tg} x$ ,

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0,$$

и далее — без проблем.

В общем случае *однородные уравнения* такого типа представляют собой сумму слагаемых вида  $a_{mn} \sin^m x \cos^n x$  с постоянной суммой показателей,  $m + n = k$ . Деление такого уравнения на  $\cos^k x$  переводит его, как и (3.20), в алгебраическое  $k$ -й степени относительно  $\operatorname{tg} x$ .

В случае замены в (3.20) нуля, скажем, на 5 — уравнение перестаёт быть однородным, но трёхкопеечная хитрость — замена 5 на  $5(\sin^2 x + \cos^2 x)$  — возвращает его в ту же категорию.

## 3.5 Как не прозевать тригонометрию

В некоторых задачах тригонометрия прячется за внешним фасадом из другой оперы. Скажем, решить уравнение:

$$! \rightsquigarrow \sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x. \quad (? \quad) \quad (3.21)$$

◀ Тригонометрией вроде бы даже не пахнет. Тем не менее, в силу необходимости  $1 - x^2 \geq 0$ , имеем право без потерь положить  $x = \cos \varphi$ ,  $\varphi \in [0, \pi]$ . Уравнение (3.21) переходит в

$$\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi.$$

---

<sup>5</sup> При  $a \neq 0$  деление на  $\cos^2 x$  правомочно, поскольку  $\cos x = 0$  заведомо не годится в качестве решения (3.20).



Вспоминая формулу косинуса тройного угла (1.41), в результате имеем

$$|\sin \varphi| = \cos 3\varphi, \quad \varphi \in [0, \pi] \Rightarrow \sin \varphi = \cos 3\varphi,$$

т. е.  $\cos 3\varphi - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 0$ , что по формуле разности косинусов (1.38) равносильно уравнению

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

решениями которого является совокупность углов

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, \quad k, n \in \mathbb{Z},$$

из которой лишь три угла попадают в диапазон  $\varphi \in [0, \pi]$ :

$$\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{8}, \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{8}.$$

Окончательно:  $x_1 = \cos \frac{3\pi}{4}$ ,  $x_2 = \cos \frac{\pi}{8}$ ,  $x_3 = \cos \frac{5\pi}{8}$ . ►

Конечно, уравнение (3.21) специально подобрано. Но таких финтифлюшек, где щипцы тригонометрии позволяют легко извлечь корни, не так мало. Потому что составители задач идеи для творчества где только не добывают. На них за это можно косо смотреть, но в конце концов наша с Вами доля — *смотреть и видеть*<sup>6</sup>. Если кто-то предлагает доказать импликацию

$$s^2 + t^2 = 1, \quad u^2 + v^2 = 1 \Rightarrow |su + tv| \leq 1,$$

то это наша с Вами участь рассмотреть в подоплёке тригонометрию. Не упустить из виду, что  $s, t$  можно считать синусом и косинусом, аналогично  $u, v$ , и тогда под модулем стоит  $\cos(\alpha - \beta)$ , что сразу избавляет нас от лишней писанины.

Или, скажем, необходимо решить систему уравнений



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 5x + 7y = 19. \end{cases} \quad (3.22)$$

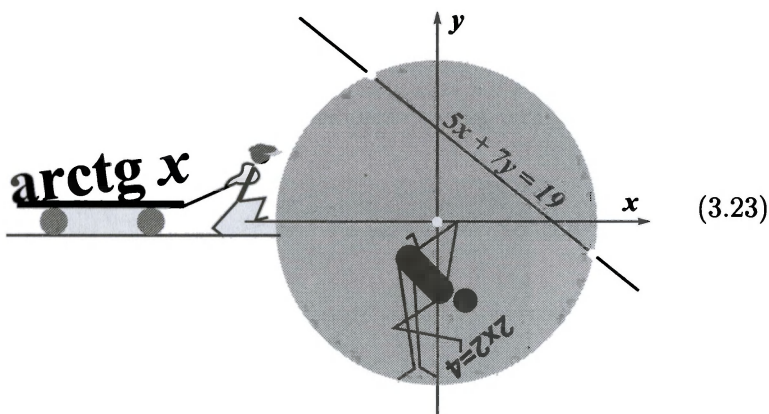
<sup>6</sup> «Смотреть и не видеть» — тоже трудно, но это в других ситуациях.

Тут насчёт тригонометрии за язык вроде бы никто не тянет, да и не предполагается, навскидку. Однако естественная замена  $x = 5 \sin \varphi$ ,  $y = 5 \cos \varphi$ ,  $\varphi \in (0, \pi]$  — первому уравнению удовлетворяет автоматически, а второе — переводит в

$$25 \sin \varphi + 35 \cos \varphi = 19,$$

которое стандартно решается с помощью *введения вспомогательного угла*, см. раздел 1.12.

Определённый резон имеет геометрическая иллюстрация системы (3.22):



В том смысле, что на любое дело полезно смотреть хотя бы с двух точек зрения. Первому уравнению (3.22) отвечают точки окружности радиуса 5, второму — точки прямой  $5x + 7y = 19$ . Решений два — отмечены белыми кружочками. Расположение решений на окружности до некоторой степени объясняет закадровую роль тригонометрии.



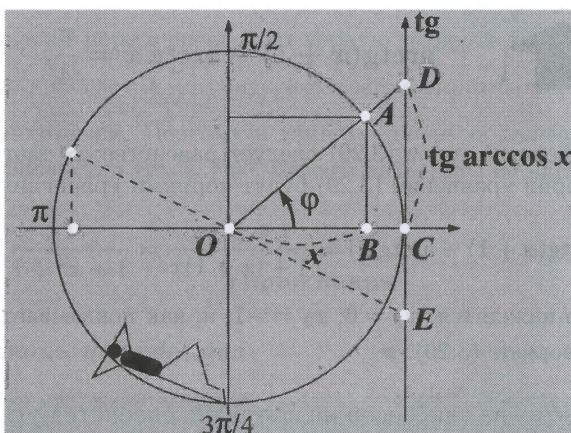
как раз следует  $AB = \sqrt{1-x^2}$ . Для отрицательного  $x$  соответствующий чертёж выполнен пунктиром. Синус в любом случае получается положительным<sup>7</sup>. ►

• Аналогичная задача:

$$\operatorname{tg} \arccos x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \quad (?) \quad (3.26)$$

Корень в (3.24) опять таки арифметический.

◀ И здесь выручает единичная окружность



(3.27)

Величина  $\operatorname{tg} \arccos x$  равна  $CD$ . Из подобия треугольников  $OAB$  и  $ODC$  следует  $CD = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ . В случае отрицательного  $x$  пункт  $E$  приводит в  $E$ , снова  $CE = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ , что и даёт (3.26). ►

• Если  $\arctg u - \arctg v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , то

$$\arctg u - \arctg v = \arctg \frac{u-v}{1+uv}. \quad (?) \quad (3.28)$$

<sup>7</sup> Из-за того, что значения  $\arccos$  всегда принадлежат  $[0, \pi]$ .

◀ На интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  тангенс — строго монотонно возрастает, и потому взаимно однозначен. Вследствие этого равенство (3.28) справедливо, если тангенсы от левой и от правой части (3.28) равны. Пользуясь формулой (1.28), имеем

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v) = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{arctg} u - \operatorname{tg} \operatorname{arctg} v}{1 + \operatorname{tg} \operatorname{arctg} u \operatorname{tg} \operatorname{arctg} v} = \frac{u - v}{1 + uv}.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \operatorname{arctg} \frac{u - v}{1 + uv} = \frac{u - v}{1 + uv}. \quad \blacktriangleright$$

### • Решим уравнение:



$$\operatorname{arctg}(x + 1) - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}. \quad (3.29)$$

◀ Из равенства углов (3.29) следует равенство их тангенсов. Поэтому все корни уравнения (3.29) будут корнями уравнения<sup>8</sup>

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x + 1) - \operatorname{arctg} x) = \frac{x + 1 - x}{1 + (x + 1)x} = \frac{1}{1 + x^2 + x} = 1.$$

Корни легко находятся,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ , и, как показывает проверка, оба удовлетворяют (3.29). ▶

Из равенства тангенсов не вытекает равенства углов. Углы могут быть равны или могут отличаться на  $k\pi$ . Если бы в (3.29) вместо  $\frac{\pi}{4}$  было  $\frac{5\pi}{4}$ , то соответствующее уравнение не имело бы решений, поскольку сводилось бы к тому же  $\frac{1}{1 + x^2 + x} = 1$ , корни которого уже заняты, удовлетворяют (3.29).

Из-за червоточинки подобных методов в конце приходится использовать проверку, что не всегда просто. Но избавиться от проверки может анализ. Вот соответствующий пример.

<sup>8</sup> Т. е. потерять корни при таком переходе мы не потеряем, но хватить лишнего — можем. Тот же приём в случае  $\operatorname{arctg}(x + 1) - \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}$  приводит к уравнению  $\frac{1}{1 + x^2 + x} = -1$ , не имеющему решений, — и на этом можно ставить точку, поскольку потери решений произойти не могло.

• Уравнение

$$\arcsin 3x = \arccos x$$



(3.30)

◀ после взятия синуса от углов (3.30) переходит в уравнение

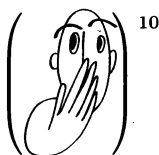
$$3x = \sqrt{1 - x^2},$$

имеющее единственное решение  $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ , которое заведомо удовлетворяет (3.30) по следующей причине. Изначально ясно, что (3.30) может выполняться только при  $x > 0$ , поскольку области значений арксинуса и арккосинуса в пересечении дают первую четверть единичной окружности. А на участке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  синус, который мы применяли к (3.30), *взаимно однозначен*. Поэтому в данном случае из равенства синусов<sup>9</sup> вытекает равенство углов. Всё! Ничего проверять не надо. ▶

### Упражнения

*Доказать тождества:*

$$\bullet \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$



(3.31)

$$\bullet \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

(3.32)

$$\bullet \arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}.$$

(3.33)

$$\bullet \arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

---

<sup>9</sup>  $\sin \arcsin 3x = \sin \arccos x$ .



$$\bullet \arcsin(-x) = -\arcsin x. \quad (3.35)$$

$$\bullet \arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$



$$(3.36)$$



$$\bullet \operatorname{tg} \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3.37)$$

$$\bullet \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi.$$



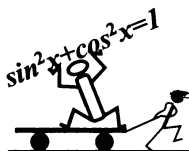
$$(3.38)$$



$$\bullet \operatorname{arctg} 3 = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (3.39)$$

**Решить уравнения:**

$$\bullet 2 \arcsin x = \arccos x,$$



$$\left(x = \frac{1}{2}\right). \quad (3.40)$$



$$\bullet 4 \operatorname{arctg}(x^2 - 8x + 16) = \pi, \quad (x_1 = 3, x_2 = 5). \quad (3.41)$$



$$\bullet \arcsin x = \operatorname{arctg} x, \quad \text{жонглирует} \quad \left( x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right). \quad (3.42)$$

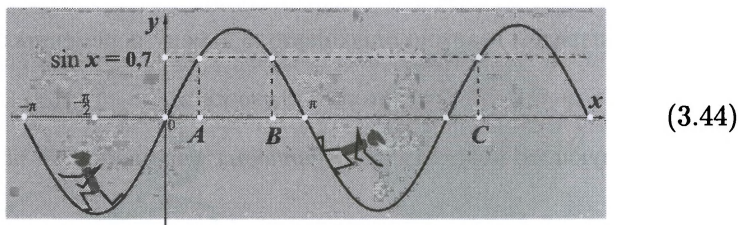
### 3.7 Неравенства

Тригонометрическая специфика неравенств проявляется либо при жонглировании формулами, либо на финише решения, когда надо написать ответ для чего-нибудь вроде<sup>11</sup>

$$\sin x \geq 0,7. \quad (3.43)$$

Рисунок (3.44) ситуацию делает вполне прозрачной,  $A \leq x \leq B$ , причём с периодичностью  $2\pi$ , т. е. окончательно

$$A + 2k\pi \leq x \leq B + 2k\pi.$$



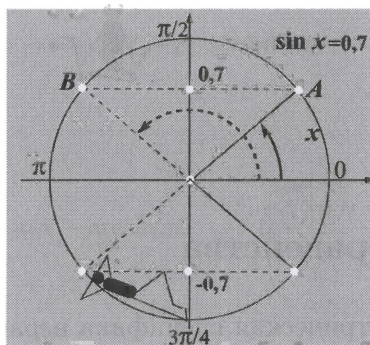
Остаётся только указать, чему равны  $A$  и  $B$ :  $A = \arcsin 0,7$ ,  $B = \pi - \arcsin 0,7$ , и тогда уже «совсем окончательно»:

$$\arcsin 0,7 + 2k\pi \leq x \leq \pi - \arcsin 0,7 + (2k+1)\pi.$$

<sup>11</sup> Конечно, (3.43) может выступить и в качестве самостоятельной задачи.



Полезно проследить то же самое на единичной окружности<sup>12</sup>.



(3.45)

В случае  $\sin x < 0,7$  ответ:  $B + 2k\pi < x < C + 2k\pi$ , — а «совсем окончательно»:

$$-\arcsin 0,7 + (2k + 1)\pi < x < \arcsin 0,7 + 2(k + 1)\pi.$$

- Найти минимум и максимум функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2}. \quad (?) \quad (3.46)$$

- ◀ Произведём взаимно однозначную замену переменных

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

соответствующую переходу от *декартовых* переменных к *полярным*.



<sup>12</sup> Для ублажения Бегемотика.

В переменных  $\{r, \varphi\}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + xy}{x^2 + y^2} &= \frac{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{2} \sin \left( 2\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

Поэтому *точные границы* снизу и сверху для функции (3.46) таковы:

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq f(x, y) \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}. \quad \blacktriangleright$$

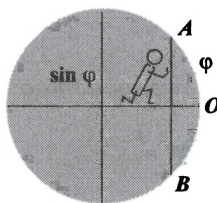
• Доказать, если  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , то:

$$\cos \sin \varphi > \sin \cos \varphi. \quad (?) \quad (3.47)$$

◀ Для любого  $\varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ :

$$\sin \varphi \leq \varphi, \quad (3.48)$$

что сразу следует из того, что хорда  $AB$  меньше дуги  $AOB$ , а значит, «половина хорды меньше половины дуги».



Заменяя в (3.48)  $\varphi$  на  $\cos \varphi$ , имеем

$$\sin \cos \varphi \leq \cos \varphi.$$

А поскольку  $\cos \varphi$  строго убывает на  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ , то из (3.48) следует

$$\cos \sin \varphi > \cos \varphi.$$

Сопоставляя последние неравенства, получаем (3.47). ►

- Решить неравенство

$$16 \sin^2 x - 8 \operatorname{tg} x + \sec^2 x > 0. \quad (?) \quad (3.49)$$

◀ Наличие в (3.49) функций  $\operatorname{tg} x$  и  $\sec x$  исключает сразу значения  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ . Умножая (3.49) на  $\cos^2 x$ , с учётом  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , приходим к эквивалентному неравенству

$$4 \sin^2 2x - 4 \sin 2x + 1 > 0,$$

т. е.  $(2 \sin 2x - 1)^2 > 0$ , что из  $x \in \mathbb{R}$  дополнительно исключает точки  $x$ , в которых  $2 \sin 2x - 1 = 0$ . Окончательно<sup>13</sup>

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad k, n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleright$$

### Упражнения

*Доказать неравенство:*

$$\bullet \min_k \operatorname{tg} \varphi_k \leq \frac{\sin \varphi_1 + \dots + \sin \varphi_n}{\cos \varphi_1 + \dots + \cos \varphi_n} \leq \max_k \operatorname{tg} \varphi_k, \quad \left( \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{человек} \end{array} \right)^{14} \quad (3.50)$$

где  $0 < \varphi_1, \dots, \varphi_n < \frac{\pi}{2}$ .

*Решить неравенство:*



$$\bullet 16 \sin^2 x - 8 \operatorname{tg} x + \sec^2 x \leq 0. \quad (3.51)$$

<sup>13</sup> Здесь мы опираемся на формулу (1.52) для записи условия  $\sin 2x \neq \frac{1}{2}$ .

<sup>14</sup> Здесь тот самый случай, когда решает широта кругозора. Кто знаком со стандартным неравенством

$$\min_k \left( \frac{a_k}{b_k} \right) \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} \leq \max_k \left( \frac{a_k}{b_k} \right),$$

см. АА-(13.7), — (3.50) доказывает в одно касание.

Ответ:  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$

**Решить неравенство:**

$$\bullet \frac{\sin \varphi}{\sin 3\varphi} \geq 0 \quad \left( \text{img} \right)^{15} \quad (3.52)$$

**в диапазоне  $0 \leq x \leq \pi$ .**

Ответ:  $0 < x < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} < x \leq \pi.$




---

<sup>15</sup> В такого сорта задачах полезно иметь в виду «метод интервалов», см. АА-раздел 13.4.

## Глава 4

# Факультатив

*Многое находится на тех этажах знания,  
где здравый смысл без математики  
не улавливает суть явлений.*

### 4.1 Комплексные числа

Если о *комплексных числах* рассказывать просто, и даже шутя, то довольно быстро становится понятно, что это феноменально полезный трюк, фокус. Ничуть не слабее, чем *натуральный ряд*. Обыкновенные числа разве существуют во Вселенной? Это же мы их придумали. Оказалось удобно, продуктивно. Ну так и *комплексные числа* тоже мы придумали. В смысле «мы пахали». Но идея потрясающая. Только не надо искать, где же они прячутся в устройстве Мироздания. Они у нас в голове, как движение мысли, которое позволяет кое-куда заглянуть, куда с чисто натуральным рядом ходу нет.

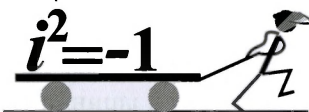


Арифметика, понятное дело, разрабатывалась в несколько приёмов. Сначала придумали *обыкновенные числа* (*целые положительные*), потом *операции* (*сложение, вычитание*). Вычи-

тать — не всегда получалось. Пришлось вернуться к числам. Добавили отрицательные — игровая площадка стала удобнее. Мяч в аут перестал улетать. Арифметика стала замкнутой по сложению и вычитанию. Но «сатана недолго ждал реванша». Пришлось делить — и стало всё как раньше. Короче, далее были введены дроби, затем вещественные числа — и всё ради того, чтобы разные операции не выводили за пределы игрового поля<sup>1</sup>.

Наконец, дело дошло до проблемы извлечения корня из отрицательного числа. Стоило ли тут придумывать новый фокус? Стоило по тем же самым причинам, по которым были введены отрицательные числа. Каковые рождены не для удобства записи долгов с минусом<sup>2</sup>, а для обеспечения свободы арифметического полёта. Задачи с условиями и ответами в пределах натурального ряда  $\mathbb{N}$  нередко удобно решаются при движении по «отрицательной и дробной территории»<sup>3</sup>. Возможность иметь дело с  $\sqrt{-1}$  как с чем-то **законным** — тоже оказывается полезной, причём невероятно, что подтверждается разворачиванием событий.

Итак, объявляем, что некое  $i$  (фикция, символ) при возведении в квадрат даёт  $-1$ . Тогда решением  $x^2 = -1$  будет  $x_{1,2} = \pm i$ .



Просто объявить, понятное дело, недостаточно. Надо определить для  $i$  арифметические действия, включить в общую числовую семью и проверить, не будут ли возникать противоречия. Замкнутость в арифметике требует, например, приплюсовать к  $\mathbb{R}$  числа вида

$$x \pm iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

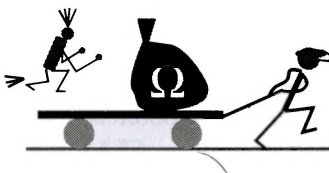
которые и называют **комплексными (КЧ)**. Их множество  $\mathbb{C}$  называют также **комплексной плоскостью**. Не факт, конечно, что этого хватит для любых арифметических действий. Но этого хватает, как потом

<sup>1</sup> Загвоздка возникла с делением на нуль, и там сделали оговорку.

<sup>2</sup> Это всего лишь побочный результат, к счастью, положительный.

<sup>3</sup> Примеры см. в главе 2, АА.

выясняется, и для деления<sup>4</sup>, и для извлечения корней, и даже для извлечения корней *любой степени*. К тому же решаться начинают и алгебраические уравнения любой степени, не только квадратные! Что свидетельствует о большой удаче и точном попадании.



Иногда вместо  $i^2 = -1$  за определение *мнимой единицы* берут  $i = \sqrt{-1}$ , что недопустимо. Ибо получается всякая ерунда:

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} \Rightarrow i^2 = 1.$$

Теперь обо всём по порядку.

#### 4.1.1 Комплексными числами называются числа вида

$$z = x + iy,$$

где  $x, y$  — обыкновенные вещественные числа, а  $i$  — так называемая *мнимая единица*,  $i^2 = -1$ . Величину  $x$  называют *действительной частью*,  $y$  — *мнимой*, и пишут<sup>5</sup>



$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

Операции сложения и вычитания определяются покомпонентным сложением и вычитанием:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$



<sup>4</sup> Опять-таки со скидкой на запрет деления на нуль.

<sup>5</sup> Имея в виду  $\operatorname{Re}$  — от англ. real,  $\operatorname{Im}$  — от imaginary.

Два КЧ считаются равными, когда равны их действительные и мнимые части. Понятия *больше/меньше* для КЧ не определены. Правило умножения получается обыкновенным раскрытием скобок. С учётом  $i^2 = -1$ , это даёт

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) + i^2 y_1 y_2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

*Легко проверяются стандартные свойства умножения:*

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3), \quad (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Для деления используется несложный трюк избавления от мнимой единицы в знаменателе, опирающийся на факт вещественности произведения

$$z z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

где  $z^* = x - iy$  называют *сопряжённым числом*. Фокус

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*}$$

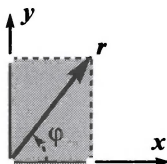
избавляет от мнимой единицы в знаменателе и сводит деление к умножению  $z_1 z_2^*$  в числителе. Например,

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2-1+i(1+2)}{1^2-i^2} = \frac{1+3i}{2}.$$

## 4.2 Тригонометрическая форма КЧ

Указанные выше способы умножения и деления КЧ используются редко, поскольку есть более эффективные приёмы, основанные на геометрическом представлении комплексных чисел: числу  $z = x + iy$  сопоставляется вектор на плоскости  $z = \{x, y\}$ , рис. (4.1). Воплощение фикции, если угодно.





(4.1)

В полярных координатах,  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  — модуль  $z$ ,  $\varphi$  — аргумент  $z$ . Поскольку

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

КЧ  $z$  записывается в тригонометрической форме<sup>6</sup>

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Неожиданно обнаруживается, что «неуклюжее» умножение имеет прозрачный геометрический смысл. При умножении  $z_1$  и  $z_2$  модули перемножаются, аргументы складываются. Формула

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (4.2)$$

элементарно проверяется<sup>7</sup>, как и формула деления:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

В тригонометрической форме удобно извлекать корни. При  $k = 0, 1, \dots, n-1$  получаются  $n$  различных корней  $n$ -й степени

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (4.3)$$




<sup>6</sup> В силу периодичности тригонометрических функций аргумент  $\varphi$ , вообще говоря, многозначен:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Сей факт выстреливает при извлечении корней, см. далее.

<sup>7</sup> С помощью формул синуса и косинуса суммы двух углов. Исполните, пожалуйста, проверку в качестве упражнения.

что проверяется обратным возведением в  $n$ -ю степень по очевидной, в силу (4.2), формуле Муавра



$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

и с учётом периодичности синуса и косинуса.

- В соответствии с (4.3)  $\sqrt[3]{1}$ , имеет три корня:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Корни  $\sqrt[3]{-1}$ :

$$\left\{ \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad -1; \quad \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}. \quad (4.4)$$

Кому кажется, что «лишние корни» — лишняя морока, не торопитесь с выводами. Эти «лишние корни» спасают целые научные дисциплины, линейные дифференциальные уравнения, например. Да и «по мелочам» многое приходит в порядок. Загадочность уходит как утренний туман. Скрытые пружины обнаруживаются. Конечно, всему своё время.

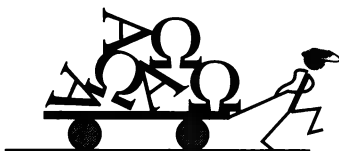
### 4.3 Что там, за горизонтом

К сказанному выше необходимо добавить аргументы в пользу КЧ утилитарного толка. Полезность КЧ на простых примерах демонстрируется в следующем разделе. Психологически такие мелочи наиболее действенны. Но есть ещё аргументы, как говорится, «по большому счёту» — и они более важны, что не сразу заметно.

Главный аргумент здесь — в том, что комплексные числа пронизывают всю математику. И если Вы планируете двинуться по стезе технического образования, то КЧ поначалу у Вас в зубах

навязнут, а потом в хобби превратятся. С ними в некоторых специальностях дело приходится иметь чаще, чем с обыкновенными числами. Поэтому привыкать к КЧ желательно со школьных времён<sup>8</sup>. Убедиться в сказанном насчёт «всей математики» проще всего, полистав учебники по теоретической физике, электротехнике, высшей математике, где мнимых единиц больше, чем запятых.

«Мистическая природа» комплексных чисел даёт о себе знать интуитивно неожиданным образом. Ситуация на *действительной прямой* странным образом почти всегда оказывается зависящей от того, как соответствующие задачи «расцветают» в *комплексной плоскости*<sup>9</sup>. Линейные дифференциальные уравнения, например, при попытке ограничиться вещественными числами из красивой теории превращаются в неудобный клубок загадочных фактов. Электротехника без КЧ блекнет и теряет логическую основу. Трансформаторы, конечно, продолжают работать, но причины как-то смазываются. Если  $\mathbb{R}$  не расширить до  $\mathbb{C}$ , невозможно разобраться в механизме, управляющем сходимостью степенных рядов. Ряд<sup>10</sup>  $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$  сходится только при  $|x| < 1$ , потому что у  $\frac{1}{1-x^2}$  есть особая точка  $x = 1$ . Ряд  $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$  также сходится только при  $|x| < 1$ , хотя особых точек вообще нет. Но это, правда, на вещественной прямой. Тогда как у  $\frac{1}{1+x^2}$  есть, видите ли, особая точка  $x = i$ , как раз  $|x| = |i| = 1$ . Но с какой стати точка  $i \in \mathbb{C}$  управляет сходимостью ряда на  $\mathbb{R}$ ?



<sup>8</sup> Исключивший КЧ из школьной программы будет вечно искать в назидание реформаторам, включающим, наоборот, много лишнего.

<sup>9</sup> В  $\mathbb{C}$  всё «расцветает» единственным образом, но это выясняется лишь в ТФКП (Теории Функций Комплексного Переменного).

<sup>10</sup> Геометрическая прогрессия.

Разговор, конечно, скользкий, как бы преждевременный. Но мы лишь пытаемся намекнуть, что КЧ в будущей жизни будут полезны не содействием в понимании бухгалтерских ведомостей, а вскрытием глубинных механизмов Поднебесной.

Вот, скажем, *формула Эйлера*

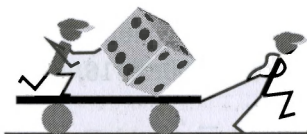
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (4.5)$$



об истинной природе которой лучше пока не говорить, дабы не забегать вперёд. Но получать удовольствие от виртуального света из *тьмы Космоса* можно уже сейчас. Во-первых, предвкушая таинство. Во-вторых, обращая внимание на странные совпадения. Формула умножения (4.2) в луче прожектора (4.5) приобретает совсем простой смысл

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (4.6)$$

Кроме того, КЧ — это не случайная находка. Арифметические операции порождают цепную реакцию. Из натурального ряда возникают отрицательные числа, потом дроби, затем мнимая единица и, наконец, комплексные числа. На этом *расширение* игрового поля заканчивается. Так что комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  как неизбежный финал роста натурального ряда порождает арифметика, на которой стоит вся остальная математика. Именно поэтому КЧ дают о себе знать практически в любой области.



• Конечно, имеет смысл осмотреться. «Шаг влево, шаг вправо» — куда здесь ведут? Навскидку вместо  $i^2 = -1$  можно было бы положить

$$i^2 = \alpha + i\beta$$

с произвольными  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , что при умножении не выводило бы за пределы *двумерных чисел* вида  $x + iy$ . Но какие-то общепринятые свойства арифметических операций пострадали бы. Единственный «безопасный» в этом отношении вариант  $i^2 = -1$ . Тем не менее некоторые двумерные числа вида

$$x + \varepsilon y$$

используются. Например, *дуальные числа*, опирающиеся на регламент  $\varepsilon^2 = 0$ , находят применение в геометрии и отчасти в теории чисел. В случае  $\varepsilon^2 = 1$ , но  $\varepsilon \neq \pm 1$ , числа называются *двойными* и применяются в геометрии *Лобачевского* и псевдоевклидовой геометрии.

## 4.4 Примеры

- При сложении когерентных колебаний, идущих от щелей дифракционной решётки, возникает сигнал

$$x(t) = \cos \omega t + \cos(\omega t + \varphi) + \dots + \cos(\omega t + n\varphi).$$

Задача суммирования здесь довольно сложна. Если же заметить, что  $x(t)$  является действительной частью суммы

$$z(t) = e^{i\omega t} + e^{i(\omega t + \varphi)} + \dots + e^{i(\omega t + n\varphi)}, \quad (4.7)$$



проблема легко разрешается, поскольку  $z(t)$  представляет собой сумму геометрической прогрессии с показателем  $e^{i\varphi}$ . Далее остаётся положить  $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$ .

- Числовая последовательность<sup>11</sup>  $a_n$ ,

$$1, 1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, 16, 16, 0, -32, \dots, \quad (4.8)$$

устроена по правилу  $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$ . Стандартный рецепт определения формулы  $n$ -го члена заключается в поиске решения в виде  $a_n = x^n$ , что после подстановки в  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$

---

<sup>11</sup> Ряд (4.8) рассматривался в **АА**, где есть и другие примеры на определение формулы  $a_n$  для *рекуррентных последовательностей*, с мини-теорией которых имеет смысл ознакомиться по разделу 7.5, **АА**.

даёт  $x^{n+2} - 2x^{n+1} + 2x^n = 0$ , а после сокращения на  $x^n$  приводит к уравнению

$$x^2 - 2x + 2 = 0,$$

которое имеет корни<sup>12</sup>

$$x_{1,2} = 1 \pm i.$$

Общая формула для  $a_n$  имеет вид  $a_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$ . При начальных условиях  $a_0 = a_1 = 1$  выходит  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ . Окончательно<sup>13</sup>

$$a_n = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2}.$$

Заметим, что все  $i$  в нечётных степенях здесь взаимно уничтожаются, и  $a_n$  получаются действительными, причём в точности вычисляют  $a_n$ . Другими словами, комплексные числа в данном случае решают исходную задачу, в которой никаких мнимостей изначально нет.

- Возводя  $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy$  в куб, имеем

$$a+ib = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

Таким образом, чтобы извлечь корень  $\sqrt[3]{a+ib}$  алгебраически, надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a, \\ 3x^2y - y^3 = b, \end{cases} \quad (4.9)$$

что не так легко сделать. Зловредный автор задачника предлагает (4.9) виде упражнения. Редко кто догадывается перейти от


<sup>12</sup> Определяемые по обычной формуле  $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ .

<sup>13</sup> С учётом некоторых тригонометрических ухищрений

$$a_n = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4},$$

обоснование чего можно воспринимать как упражнение.

(4.9) к  $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy$ , а потом извлечь корень тригонометрически. Вот конкретный пример,

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1, \\ 3x^2y - y^3 = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$


◀ Умножаем второе уравнение на  $i$  и складываем с первым,

$$(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = -1,$$

т. е.  $(x+iy)^3 = -1$ . Корень  $\sqrt{-1}$  мы уже извлекали, см. (4.4). Поэтому

$$\{x_1; y_1\} = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}, \quad \{x_2; y_2\} = \{-1; 0\}, \quad \{x_3; y_3\} = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Других решений у системы (4.10) нет. ►

• Аналогичный по сути фокус работает при поиске формул для  $\sin n\varphi$ ,  $\cos n\varphi$ . Например, по *формуле Муавра* для  $n = 3$ :

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi. \quad (4.11)$$

С другой стороны, после обыкновенного возведения в куб,

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \\ & = (\cos^3 \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi) + i(3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Поскольку левые части (4.11) и (4.12) равны, то равны и правые, а значит равны, соответственно, действительные и мнимые части. Приравняв их, получаем известные формулы<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \cos^3 \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi, \\ \sin 3\varphi &= 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi. \end{aligned} \quad (4.13)$$

• Для тех, кто не забыл *бином Ньютона*, — **АА**, раздел 9.3:

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= 1 + C_n^1 i^2 + C_n^2 i^3 + \dots = \\ &= (1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots), \end{aligned}$$

<sup>14</sup> С учётом  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  формулы (4.13) могут приобретать другой вид. Например,  $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$ .

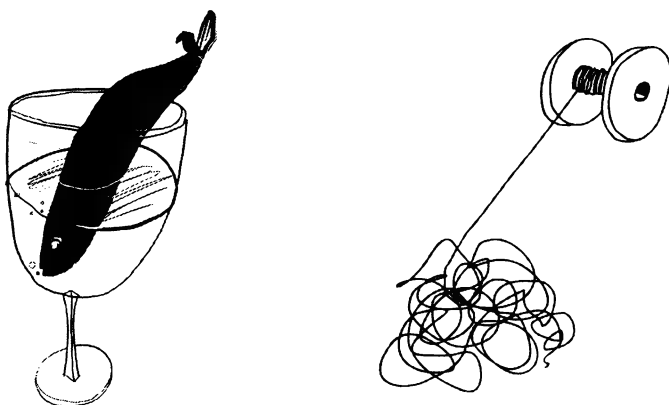
где  $C_n^k$  — биномиальные коэффициенты<sup>15</sup>. С другой стороны<sup>16</sup>,

$$(1 + i)^n = \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = 2^{n/2} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right),$$

откуда

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4},$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots = 2^{n/2} \sin \frac{n\pi}{4}.$$



## 4.5 Координаты и векторы

О векторах на плоскости  $\mathbb{R}^2$  беглый разговор был в разделе 1.6. Подъём из  $\mathbb{R}^2$  в пространство  $\mathbb{R}^3$  в какой-то части ничего особенно не меняет, но описание в общих чертах лучше повторить. Тем более что есть нюансы. Как говорится, «найдите 10 отличий». Однако разговор в целом затевается не ради мелких отличий. Далее на пути возникают крупные пространственные виражи, и к ним желательно быть предварительно подготовленным.

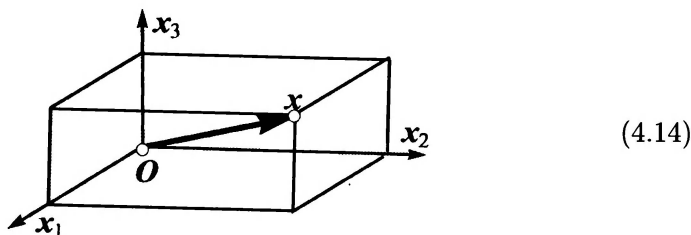
Итак, *координатами* называют числа, определяющие положение точки в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Прямоугольные *декартовы* координаты точки в  $\mathbb{R}^3$  — суть снабжённые знаками *плюс* или *минус* расстояния от точки  $x$  до трёх взаимно перпендикулярных

<sup>15</sup> Число сочетаний из  $n$  по  $k$ , **АА** — п. 9.3.

<sup>16</sup> По формуле Муавра.



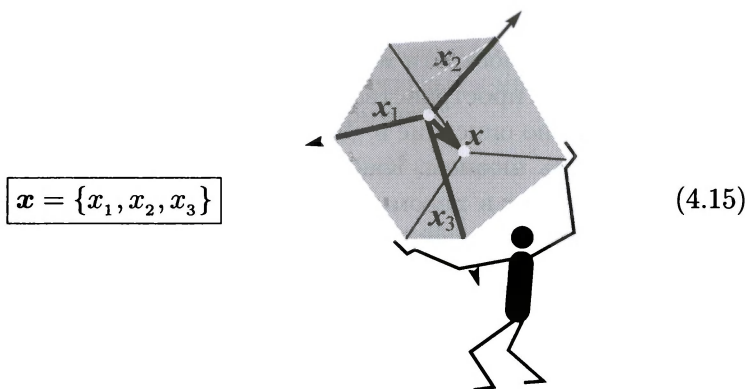
плоскостей, рис. (4.14). Пересечение осей координат  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  считается началом координат.



Ещё раз. Систему *декартовых координат* в  $\mathbb{R}^3$  задают три взаимно перпендикулярные плоскости,

$$Ox_1x_2, \quad Ox_1x_3, \quad Ox_2x_3,$$

относительно которых положение точки определяется тремя числами,  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ , рис. (4.15). Точку  $\mathbf{x}$  называют также *вектором*, либо *радиус-вектором*. Все векторы, которые одинаково направлены и равны по длине, считаются равными, что позволяет ограничиться рассмотрением векторов, исходящих из начала координат

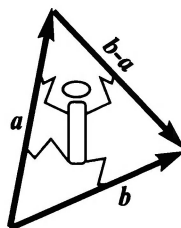


Сумма  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$  и  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$  определяется как

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\},$

(4.16)

что равносильно сложению векторов по правилу параллелограмма, эквивалентом которого является *правило треугольника*, см. раздел 1.6. Преимущества последнего выявляются при сложении нескольких векторов, рис. (1.19): каждый следующий слагаемый вектор приставляется началом к концу предыдущего — замыкающий вектор даёт сумму. Вычитание выводится из сложения:  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  определяется как вектор, который в сумме с  $\mathbf{a}$  даёт  $\mathbf{b}$ . Этому соответствует простой геометрический трюк: начала  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  совмещаются, а концы соединяются отрезком, направленным к  $\mathbf{b}$ , что и даёт разность  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ .



Умножение на скаляр  $\lambda$ ,

$$\lambda \mathbf{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\},$$

растягивает ( $|\lambda| > 1$ ) или сжимает ( $|\lambda| < 1$ ) вектор  $\mathbf{x}$ , не меняя направления при  $\lambda > 0$ , и меняет его на противоположное при  $\lambda < 0$ .

Вектор иногда определяют как направленный отрезок, но тогда в граничных ситуациях возникают проблемы. Скажем, вращение около некоторой оси на угол  $\varphi$  — вектор или не вектор? С одной стороны, ему можно сопоставить направленный по оси отрезок прямой длины  $\varphi$ , но это заводит в тупик. Неприятность заключается в том, что вращения около разных осей не складываются по правилу параллелограмма<sup>17</sup>, что приводит к отрицательному ответу на исходный вопрос. Поэтому в подобное определение вектора необходимо добавлять требование, чтобы векторы складывались по правилу параллелограмма. У нас это обеспечивается автоматически правилом суммирования (4.16).

Поначалу обычно возникает впечатление, что векторные понятия нужны для краткости. Это лишь половина правды. Геометрия имеет «некоординатный» характер, и её координатное описание часто уводит мысль в ложном направлении. Векторный язык точнее отражает суть геометрических свойств, что обнаруживается на каждом шагу.

<sup>17</sup> Складываются по правилу параллелограмма бесконечно малые вращения, что влечёт за собой векторную природу угловой скорости.

## 4.6 Линейная независимость

Векторы, лежащие на одной прямой (одинаково или противоположно направленные), называют *коллинеарными*; лежащие в одной плоскости, — *компланарными*.

Говорят, что множество векторов<sup>18</sup>  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$  *линейно зависимо*, если существуют такие коэффициенты  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , не все равные нулю, что

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

В противном случае говорят о *линейной независимости* векторов  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ .

Коллинеарные векторы всегда линейно зависимы. Компланарные<sup>19</sup> — линейно зависимы, если их больше двух. (?)

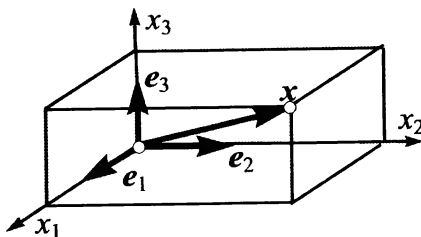
Линейно независимое множество  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  в  $\mathbb{R}^3$  считается *базисом*, если любой вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  можно представить в виде *линейной комбинации*

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

Величины  $x_i$  называют *координатами* точки  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

Стандартный базис  $\mathbb{R}^3$  (единичные векторы, орты,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  направлены по осям декартовых координат):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



### Упражнения\*

1. Из векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  можно сложить треугольник, если

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

<sup>18</sup> Как правило, векторы с индексом выделяются жирным шрифтом, чтобы отличить их от координат.

<sup>19</sup> Но не коллинеарные.

- Любые три вектора на плоскости либо четыре в пространстве — *линейно зависимы*.
- Любые два неколлинеарных вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  определяют плоскость<sup>20</sup>, все точки которой могут быть записаны в виде

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- В случае  $\lambda + \mu = 1$  точка  $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$  лежит на прямой, проходящей через точки  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . При дополнительном условии  $\lambda, \mu \geq 0$  точка  $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$  лежит на отрезке, соединяющем  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .
- Если  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  — радиус-векторы вершин треугольника  $ABC$ , то

$$\mathbf{r} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$$

является радиус-вектором точки пересечения медиан. Радиус-вектор точки пересечения биссектрис равен

$$\mathbf{r} = \frac{a\mathbf{BC} + b\mathbf{AC} + c\mathbf{AB}}{BC + AC + AB},$$

где  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  — длины соответствующих сторон,

$$\mathbf{r} = \frac{a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B + c \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \quad \text{— точка пересечения высот.}$$

- Координатно-векторное мышление «переворачивает» и упрощает почти любую геометрическую задачу. Вот, например, как выглядит векторное доказательство известного факта: *если диагонали четырехугольника  $ABCD$  делят друг друга пополам, то  $ABCD$  — параллелограмм*.

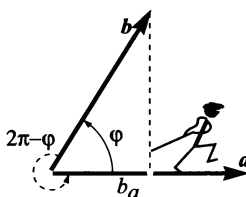
◀ Пусть  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  — радиус-векторы соответственно вершин  $ABCD$ . По условию

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}),$$

откуда следует  $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$ , т. е. стороны  $AB$  и  $CD$  равны и параллельны. ▶

*Проекция  $a_b$  вектора  $\mathbf{a}$  на вектор (направление)  $\mathbf{b}$  определяется формулой*

$a_b = a \cos \varphi,$



<sup>20</sup> Проходящую через три точки: нуль,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

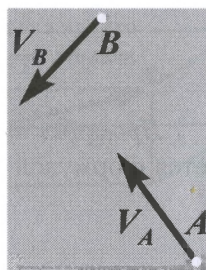
где  $\varphi$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , неважно по малой или большой дуге измеренный, в силу  $\cos \varphi = \cos(2\pi - \varphi)$ . От плоского случая ситуация внешне не отличается, что естественно, ибо векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  с совмещёнными началами задают плоскость, в которой проекция  $\mathbf{a}$  на  $\mathbf{b}$  и определяется.

Проекции  $a_x, a_y, a_z$  на декартовы оси  $x, y, z$  представляют собой координаты вектора  $\mathbf{a}$ . Мы здесь специально вместо осей  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  упоминаем оси  $Ox, Oy, Oz$ , пытаясь обратить внимание на очевидный, вообще говоря, факт произвола обозначений. Как хотим, так и обозначаем<sup>21</sup>. Такую вариативность надо всегда иметь в виду, чтобы не оказаться безоружным перед укоренившимися привычками.

## 4.7 Как это работает

Вслед за введением новых понятий обычно возникает ворох задач, связанных с образовавшейся внутренней кухней. Как говорится, не было у бабы хлопот, так купила себе порося. Но тут что поделаешь. Сам покупаешь, сам расхлебываешь. Хотелось бы всё же с самого начала посмотреть, чем это порося, т. е. векторы могут быть полезны «за пределами». Вот две показательные задачи.

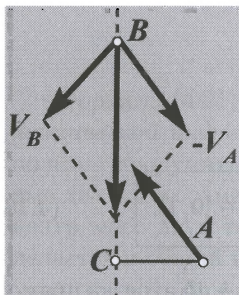
• На плоскости движутся две точки  $A$  и  $B$  с постоянными скоростями, соответственно,  $\mathbf{V}_A$  и  $\mathbf{V}_B$ , рис. справа. Рассмотрим две задачи. (i) *Найти минимум расстояния между  $A$  и  $B$  в процессе движения.* (ii) **Стрельба с упреждением.** В каком направлении  $\mathbf{V}_B$  стрелять, при заданном модуле  $|\mathbf{V}_B|$ , чтобы попасть в летящую цель  $A$ ?



Чисто координатное решение здесь будет напоминать рытьё котлована зубочисткой. Тогда как векторное мышление припод-

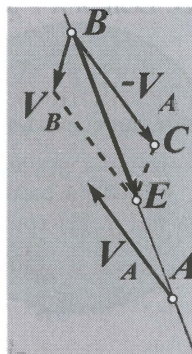
<sup>21</sup> При переходе к обозначению осей  $Ox, Oy, Oz$  единичные орты базиса  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  обычно обозначают как  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

нимает над конкретикой и даёт виденье, понимание. Причём одно лишь умение складывать векторы по *правилу параллелограмма* ставит задачи на другие рельсы.

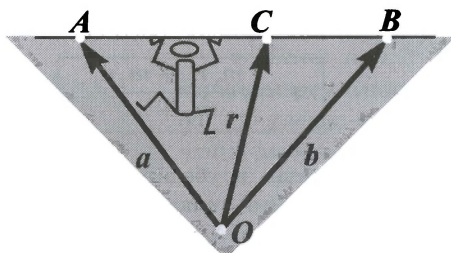


(i) Перейдём в движущуюся систему координат, в которой точка  $A$  покоится. В этой системе координат все точки плоскости движутся со скоростью «минус  $V_A$ ». Точка  $A$  стоит на месте. Точка  $B$  участвует в двух движениях, со скоростью  $V_B$  и со скоростью  $-V_A$ . Результирующая скорость направлена по прямой  $BC$ . Если  $AC \perp BC$ , то в точке  $C$  как раз и достигается искомый минимум.

(ii) В этой задаче работает тот же фокус. Переходим в движущуюся систему координат, в которой точка  $A$  покоится. Точка  $B$  для попадания в цель должна двигаться по прямой  $AB$ . С какой скоростью  $V_B$  ей надо для этого двигаться? С такой, чтобы диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $V_B$  и  $-V_A$ , была направлена по  $AB$ . Для этого надо всего лишь на  $AB$  найти точку  $E$ , обеспечивающую  $CE = |V_B|$ , что элементарно делается с помощью циркуля.



• На случай, если на фоне необыкновенной занятости Вам не удалось выполнить упражнения 3, 4 из предыдущего раздела, попробуем сделать это вместе со второго захода. Тем более что заложенные там механизмы чрезвычайно важны, хотя и очень просты. Итак, пусть точки  $A, B, C$  лежат на одной прямой как на рис. (4.17).



(4.17)

Векторы  $AC = r - a$  и  $AB = b - a$  коллинеарны, поэтому  $AC = \mu AB$  при некотором  $\mu \in [0, 1]$ , т. е.

$$r - a = \mu(b - a), \quad \mu \in [0, 1],$$

что равносильно

$$r = (1 - \mu)a + \mu b,$$

либо в эквивалентной записи

$$r = \lambda a + \mu b, \quad \lambda + \mu = 1, \quad \lambda, \mu \in [0, 1]. \quad (4.18)$$

Таким образом, (4.18) описывает все точки  $r = \lambda a + \mu b$  отрезка прямой  $AB$ . Если в  $\lambda + \mu = 1$  ограничение  $\lambda, \mu \geq 0$  снять, то

$$r = \lambda a + \mu b \quad \text{при условии} \quad \lambda + \mu = 1$$

будет описывать всю прямую<sup>22</sup>, проходящую через  $A$  и  $B$ .

• Найдём радиус-вектор точки  $C$ , делящей  $AB$  на части в отношении  $m : n$ . Из того же чертежа (4.17) следует

$$\frac{m}{n} = \frac{AC}{CB}; \quad \mu = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AC + CB} = \frac{m}{m + n}.$$

В итоге  $\mu = \frac{m}{m + n}$ ,



$$r_c = \frac{ma + nb}{m + n}. \quad (4.19)$$

• В соответствии с (4.19) радиус-вектор центра масс  $m_1, m_2$ , закреплённых в точках  $r_1, r_2$ , определяется как

$$r = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.20)$$

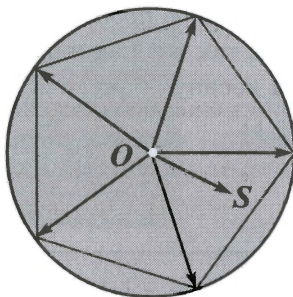
<sup>22</sup> Вернитесь немного назад и убедитесь, что ограничение  $\mu \in [0, 1]$  возникло вследствие того, что точка  $C$  лежала между  $A$  и  $B$ . Если в (4.18) все ограничения на  $\lambda, \mu$  снять, оставив лишь  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , то  $r = \lambda a + \mu b$  будет описывать всю плоскость, в которой лежат  $a$  и  $b$ .

• В общем случае центр масс  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , расположенных в точках  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_k$ , определяется как

$$\mathbf{r} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + \dots + m_k \mathbf{r}_k}{m_1 + \dots + m_k}. \quad (4.21)$$

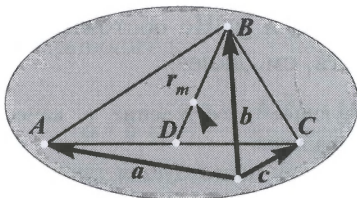
Формула (4.21) довольно просто устанавливается *методом математической индукции*, см. на [oschool.ru](http://oschool.ru). Для настройки в резонанс полезно продумать первый шаг индукции от двух масс к трём. Первые две массы заменяем массой  $m_1 + m_2$  в точке (4.20). Затем находим центр масс двух точек с массами  $m_3$  и  $m_1 + m_2$ . По этому образцу делается и общий индуктивный шаг.

• Доказать, что сумма векторов (равнодействующая сил), идущих из центра окружности к вершинам правильного вписанного  $n$ -угольника, равна нулю, рис. справа.



◀ Интуитивно декларация очевидна. Но как размытому ожиданию придать доказательную силу? Помогает симметрия.

Допустим противное. Пусть сумма  $\mathbf{S} \neq 0$ . Повернём чертёж вокруг нуля на угол  $\frac{2\pi}{n}$ . Из-за симметрии набор сил не изменится, результирующая — тоже. Но результирующая-то обязана повернуться на угол  $\frac{2\pi}{n}$ . Противоречие снимает единственно возможный вывод:  $\mathbf{S} = 0$ . ►



• Если  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  радиус-векторы вершин треугольника  $ABC$ , рис. слева, то радиус-вектор точки пересечения медиан  $\triangle ABC$

$$\mathbf{r}_m = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$



◀ Формула  $r_m$  получается как непосредственное следствие (4.21), если в вершины  $\triangle ABC$  поместить единичные массы

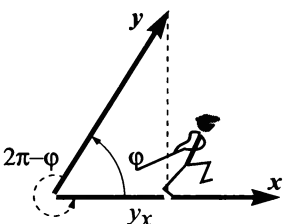
$$m_A = m_B = m_C = 1.$$

Надо лишь понять, что в этом случае центр масс находится в точке пересечения медиан. Для этого единичные массы в точках  $A$  и  $C$  заменяем массой 2 в середине  $AC$ . Окончательно центр масс  $\triangle ABC$  совпадает с центром масс  $m_D = 2$  и  $m_B = 1$  и потому лежит на медиане  $BD$ . По аналогичной причине он лежит и на других медианах, а значит — на их пересечении<sup>23</sup>. ►

## 4.8 Скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$

*Скалярное произведение* векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  в пространстве определяется так же, как и на плоскости, как произведение длин векторов на косинус угла между ними

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| \cos \varphi.$$



$(4.22)$

Другими словами,  $\mathbf{x}\mathbf{y}$  (точка в обозначении скалярного произведения часто опускается<sup>24</sup>) есть произведение длины  $\mathbf{x}$  на проекцию вектора  $\mathbf{y}$  на вектор  $\mathbf{x}$ , т. е.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| \cdot y_x.$$

Причина неизменности определения банальна. Хотя объемлющее пространство теперь  $\mathbb{R}^3$ , место действия по-прежнему двумерно — плоскость, в которой лежат  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Но обстоятельства всё же другие, и это даёт о себе знать, см. далее.

<sup>23</sup> Исполните, пожалуйста, соответствующее рассуждение в качестве упражнения, не опираясь на понятие центра масс.

<sup>24</sup> Для обозначения скалярного произведения используется также более громоздкая, но иногда полезная запись  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

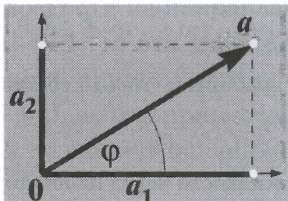
Скалярное произведение удовлетворяет обычным свойствам умножения, о чём уже говорилось в разделе 1.6. Напомним. *Коммутативность*,  $\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{x}$ , очевидна, а *дистрибутивный закон*

$$\mathbf{x}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{x}\mathbf{z}$$

вытекает из *равенства проекции суммы векторов — сумме проекций*. Поэтому векторные двучлены можно перемножать обычным образом, см. (1.22).

В прямоугольной системе координат на плоскости длина<sup>25</sup> вектора определяется как (по *теореме Пифагора*)

$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$



$(4.23)$

где  $a_1, a_2$  — координаты вектора  $\mathbf{a}$ .

В пространстве по той же *теореме Пифагора* квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда, т. е. длина вектора  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}, a_3$ , равна

$|\mathbf{a}|^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$

откуда

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})^2 = (a_1 \pm b_1)^2 + (a_2 \pm b_2)^2 + (a_3 \pm b_3)^2,$$

что приводит к

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2}{4} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

---

<sup>25</sup> Ещё говорят — *норма*, и пишут  $\|\mathbf{a}\|$ .

Последнюю формулу

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (4.24)$$

иногда принимают за исходное определение скалярного произведения, выводя (4.22) в качестве следствия.

Произведение  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi$  отражает широко распространённый в природе способ взаимодействия векторов, характеризуемый умножением длины одного вектора на проекцию другого:  $|\mathbf{a}| b_a$ . Работа, например, силы  $\mathbf{F}$  на перемещении  $\mathbf{s}$  равна

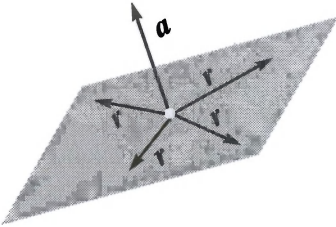
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cos \varphi,$$

поскольку «работает» только составляющая  $\mathbf{F}$ , направленная вдоль  $\mathbf{s}$ .

Поток жидкости через площадку площади  $\Delta S$  равен скалярному произведению  $\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S}$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость течения (в районе  $\Delta S$ ), а вектор  $\Delta \mathbf{S}$  считается направленным по нормали к площадке. Физически опять-таки понятная ситуация: количество жидкости, протекающей через  $\Delta S$ , определяется нормальной составляющей потока и не зависит от касательной составляющей.

Равенство нулю скалярного произведения  $\mathbf{a} \mathbf{b}$  ненулевых векторов означает — в силу вынужденного  $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0$  — *ортogonalность* векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Поэтому

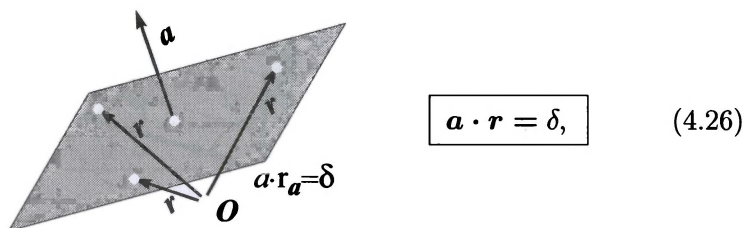
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 0,$



$(4.25)$

при фиксированном  $\mathbf{a}$  и текущем  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  представляет собой уравнение плоскости, *ортogonalной* вектору  $\mathbf{a}$  и проходя-

щей через начало координат. А уравнение



задаёт плоскость, не обязательно проходящую через начало координат, и означает, что проекция радиус-вектора  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  любой точки этой плоскости на направление  $\mathbf{a}$  одна и та же. Если дополнительно  $|\mathbf{a}| = 1$ , то эта проекция численно равна  $\delta$ . Понятно, что (4.26) лишь другая (векторная) форма записи уравнения  $\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0$ , но она привносит дополнительную интерпретацию, которая позволяет наглядно мыслить.

Прямые и плоскости в евклидовой геометрии — одни из основных объектов. Соответствующую роль в аналитической геометрии играет уравнение (4.26), манипуляции с которым помогают описать многие задачи. Например, совокупности двух уравнений

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \delta, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = \zeta$$

удовлетворяет прямая в  $\mathbb{R}^3$  (пересечение плоскостей).

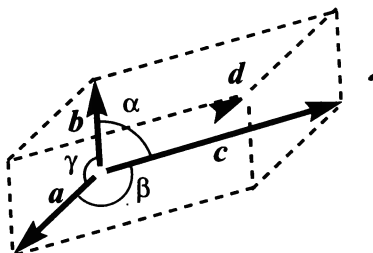
Понятия точки, прямой и плоскости в геометрии Евклида *первичны* и потому — *неопределяемы*. Аналитическая геометрия даёт определение этих понятий<sup>26</sup>, но никакого чуда при этом не происходит — первичные понятия отодвигаются в другую область.

**Задача 1.** Найти длину  $d$  диагонали параллелепипеда, зная длины его рёбер  $a, b, c$  и углы между рёбрами  $\alpha, \beta, \gamma$ .

<sup>26</sup> Как множеств решений тех или иных уравнений.

◀ Придадим  $a, b, c, d$  направления так, чтобы

$$d = a + b + c.$$



Умножая это равенство скалярно само на себя, получим

$$\begin{aligned} d^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab \cos \gamma + ac \cos \beta + bc \cos \alpha). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Задача 2.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $r_0$  и перпендикулярной вектору  $a$ .

◀ Тут мы льём воду на ту же мельницу (4.26). Очевидно, если  $r$  радиус-вектор произвольной точки такой плоскости, то вектор  $r - r_0$  должен быть перпендикулярен вектору  $a$ . Поэтому уравнение искомой плоскости имеет вид

$$(r - r_0) \cdot a = 0, \quad (4.27)$$

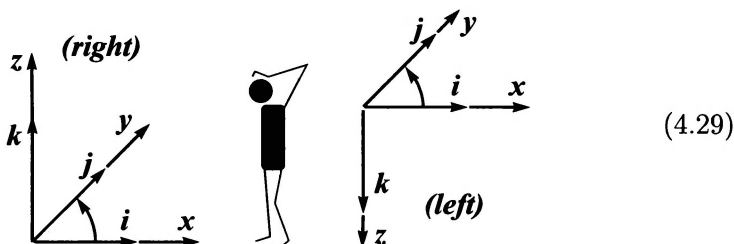
что является полезной расшифровкой уравнения (4.26). ▶

В координатной записи (4.27) выглядит так

$$a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0) = 0. \quad (4.28)$$

## 4.9 Ориентация пространства\*

При дальнейшем развитии теории важным оказывается деление систем координат на две категории. Прямоугольную систему  $Oxyz$



называют *правой*, если буравчик при вращении от  $x$  к  $y$  движется вдоль  $z$  — рис. (*right*), и *левой*, если ось  $z$  направлена противоположно — рис. (*left*).

Об ориентации пространства разговор здесь затеян в чисто информационном ключе<sup>27</sup>. Не для того, чтобы объяснить, а чтобы обратить внимание. Потому что феномен присущ устройству Мироздания и проявляется сплошь и рядом. Лево- и праворукие люди, левая и правая резьба<sup>28</sup>. Всё это хорошо известно, и на поверхности особых вопросов не вызывает. Какую резьбу нарезали — такая и получилась. Левый винт не переводится в правый движением, но что тут удивительного<sup>29</sup>. Однако почему в основном люди праворуки? А спираль ДНК? А *спин* элементарных частиц, т. е. их «винтовая закрутка»? Где причины?

В разговоре об ориентации необходимо хотя бы вскользь напомнить о **косоугольных координатах**. Иногда *декартовой* называют косоугольную систему координат общего вида, в которой координаты



<sup>27</sup> Бывает по-другому. Разговор о новом понятии целесообразен в аппаратном ключе. Стоит, мол, осознать, и там один шаг до инструментального использования.

<sup>28</sup> Винтовая линия в  $\mathbb{R}^3$  описывается параметрическим уравнением  $t \mapsto \{x(t), y(t), z(t)\} = \{\alpha \cos t, \alpha \sin t, \beta t\}$ .

<sup>29</sup> Кстати, выворачивая наизнанку левую перчатку, имеем правую.

определяются разложением вектора по двум (на плоскости) или по трём (в пространстве) направлениям, которые не обязательно взаимно перпендикулярны. Операция разложения вектора по заданным направлениям хорошо известна (разложение сил, скоростей на несколько составляющих) и заключается в построении подходящего параллелограмма (либо параллелепипеда) с последующим представлением диагонали в виде векторной суммы сторон.

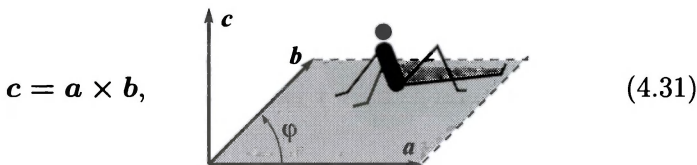
Атрибутом «декартовости» при этом является наличие *базиса*. Примером недекартовых координат могут служить (нелинейные) *полярные координаты* (вектор характеризуется длиной  $r$  и углом  $\varphi$  с выделенным направлением).

В общем случае **непрямоугольных координат** понятие *ориентации* опирается на следующее определение. **Упорядоченная** тройка некопланарных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , исходящих из точки  $\mathbf{O}$ , называется **правой**, если для наблюдателя, расположенного в нуле, обход концов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  в указанном порядке происходит по часовой стрелке. В противном случае тройка  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — **левая**. Соответственно классифицируются базисы.

Если не оговорено противное, под декартовыми у нас подразумеваются прямоугольные координаты.

## 4.10 Векторное произведение\*

В физике довольно широко распространена операция *векторного произведения*, сопоставляющая двум векторам третий, которая определяет, например, *силу Лоренца*, *момент количества движения*. *Векторное произведение* векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  является вектором  $\mathbf{c}$ , рис. (4.31),

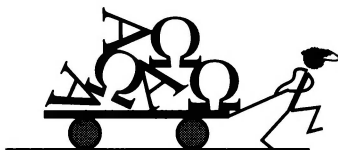


(i) *равным по длине площади параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$* , (ii) *ортогональным  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$* , и (iii) *образующим тройку  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ , такую же по ориентации, как и тройка базисных векторов  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$* , рис. (4.29).

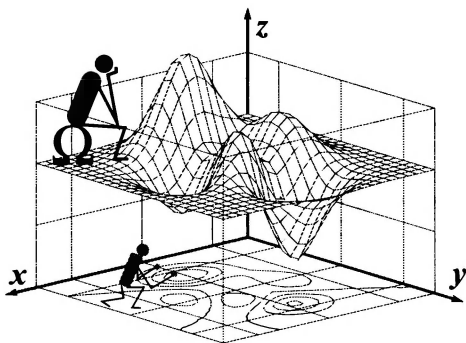
Наряду с  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  употребляются обозначения  $[\mathbf{ab}]$  и  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ . Длина вектора  $\mathbf{c}$  по определению равна

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi,$$

откуда сразу ясно  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ , если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  параллельны.



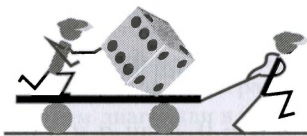
**Замечание.** Чаще всего направление  $\mathbf{c}$  определяют «правилом буравчика», ориентируясь тем самым на правую систему координат, но забывая иногда уточнить «куда крутить». Буравчик надо крутить от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$  кратчайшим образом, «съедая меньший угол»<sup>30</sup> — тогда он будет двигаться по направлению  $\mathbf{c}$ .



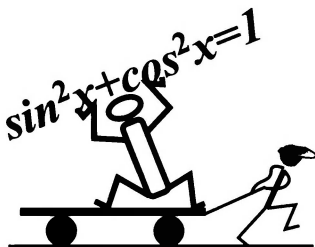
**Аксиальные векторы.** В понятии  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  есть некий скользкий момент. Векторное произведение как бы ощущает ориентацию пространства (меняет направление при замене левой системы координат на правую). Такие векторы называют *аксиальными*, и даже — *псевдовекторами*. Обычные векторы (сила, скорость) — их называют *полярными* — на замену системы координат не реагируют. Реагирует их описание. При замене координат  $\{x, y, z\}$  на  $\{-x, -y, -z\}$  описание полярного вектора  $\{a_x, a_y, a_z\}$  переходит в  $\{-a_x, -a_y, -a_z\}$ . Запись аксиального — не меняется, т. е. сам вектор меняется на противоположный. Примеры аксиальных векторов: *угловая скорость, напряжённость магнитного поля, момент силы, момент инерции*.

<sup>30</sup> Для скалярного произведения из-за  $\cos(2\pi - \varphi) = \cos \varphi$  было неважно, какой угол. Здесь же  $\sin(2\pi - \varphi) \neq \sin \varphi$ .





**Реплика.** Некоторой части учительствующего состава *аксиальные векторы* в данном контексте могут показаться неуместными. Дескать, зачем поминать всуе. Не достигая цели, так сказать. *Это очень важный момент школьного образования.* Почему-то считается, что упоминать в школе можно лишь то, что досконально разъясняется. А вот Создатель, обучая, скажем, Петю Вовочкина, от горшка два вершка, — ничего особенно не скрывает и не объясняет. Оно потом само как-то укладывается. Зато картина складывается объёмная, с перспективой. А в школе картина получается чёрно-белая, скучная. Поэтому в отношении непонятого ориентироваться лучше на те же пропорции, что и в жизни. Так что разговор о *псевдовекторах* можно оборвать посредине. Зачем было затевать? Так форточку надо было открыть.



**Свойства, наконец.** Векторное произведение не ассоциативно,

$$(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c),$$

антикоммутативно,

$$x \times y = -y \times x,$$

но справедлив дистрибутивный закон,

$$(x + y) \times u = x \times u + y \times u, \quad (4.32)$$

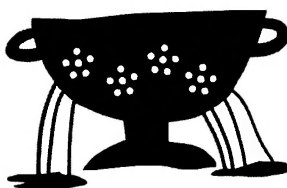
проверка которого требует некоторых усилий.

◀ Для обоснования (4.32) представим вектор  $x$  в виде суммы  $x = x_{\perp} + x_{\parallel}$ , где составляющая  $x_{\perp}$  перпендикулярна вектору  $u$ , а  $x_{\parallel}$  — параллельна. Очевидно,

$$\mathbf{x} \times \mathbf{u} = \mathbf{x}_\perp \times \mathbf{u}, \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y})_\perp = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{y}_\perp.$$

Равенство (4.32) теперь следует из почти очевидного

$$(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{y}_\perp) \times \mathbf{u} = \mathbf{x}_\perp \times \mathbf{u} + \mathbf{y}_\perp \times \mathbf{u}. \quad \blacktriangleright$$

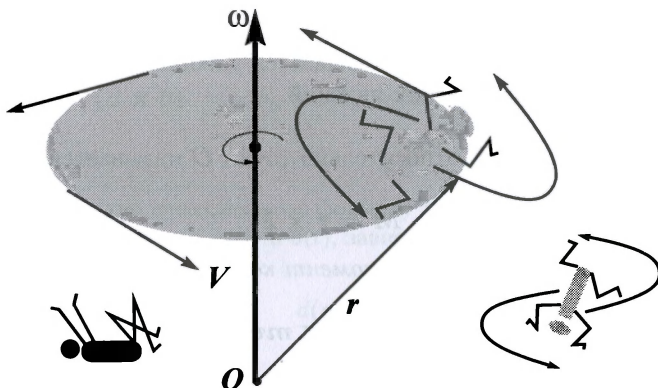


## 4.11 Угловая скорость

Вращению с угловой скоростью  $\omega$  можно сопоставить «вектор»  $\omega$ , по длине равный  $\omega$  и направленный по оси вращения в сторону, определяемую по *правилу буравчика*. В этом случае *линейная скорость*  $\mathbf{V}$  конца радиус-вектора  $\mathbf{r}$  при вращении вокруг оси, проходящей через начало координат  $\mathbf{0}$  с угловой скоростью  $\omega$ , — равна

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}, \quad (4.33)$$

чем удобно пользоваться. Но не заминировано ли это поле?



Складываются ли угловые скорости по правилу параллелограмма? Складываются, как ни удивительно. Если тело участвует в двух вращениях  $\omega^1$  и  $\omega^2$  (с пересекающимися осями), то линейные скорости, вычисляемые по (4.33),

$$v^1 = \omega^1 \times r \quad \text{и} \quad v^2 = \omega^2 \times r$$

складываются как векторы, и в силу (4.32) —

$$v = \omega^1 \times r + \omega^2 \times r = (\omega^1 + \omega^2) \times r.$$

Это означает, что результирующее движение происходит с угловой скоростью  $\omega = \omega^1 + \omega^2$ . Таким образом, угловые скорости складываются по правилу параллелограмма и потому являются полноценными векторами<sup>31</sup>.

## 4.12 Небольшой сбор урожая\*

В правой декартовой системе координат:

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j,$$

что совместно с дистрибутивным законом (4.32), легко приводит<sup>32</sup> к формулам, определяющим координаты векторного произведения  $a \times b$ :

$$\begin{aligned} (a \times b)_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ (a \times b)_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ (a \times b)_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Векторное произведение оказывается удобным инструментом при описании многих физических явлений.

*Моментом силы  $F$  относительно точки  $O$*  называется вектор

$$M = r \times F.$$

Аналогично определяется *момент количества движения*:

$$N = r \times mv.$$

<sup>31</sup> Аксиальными.

<sup>32</sup> В результате раскрытия скобок в  $(a_x i + a_y j + a_z k) \times (b_x i + b_y j + b_z k)$ .

Дифференцируя  $N$ , получаем<sup>33</sup>

$$\dot{N} = \dot{r} \times mv + r \times m\dot{v} = r \times m\dot{v} = r \times F = M,$$

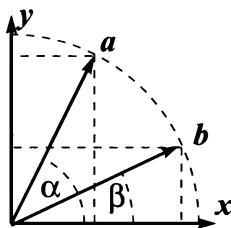
поскольку  $m\dot{v} = F$  и  $\dot{r} \times mv = v \times mv = 0$ .

Вот несколько примеров из геометрии.

- Раскрытие скобок в  $(a + b) \times (a - b)$  приводит к

$$(a + b) \times (a - b) = -2a \times b,$$

откуда следует, что площадь параллелограмма, построенного на диагоналях, в два раза больше площади исходного параллелограмма.



(4.35)

- Перемножение векторов, изображенных на рис. (4.35), даёт (в случае правой ориентации  $\{i, j, k\}$ )

$$a \times b = -\sin(\alpha - \beta) k,$$

т. е. ненулевой является только координата

$$(a \times b)_z = a_x b_y - a_y b_x = \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta.$$

Поэтому

---

<sup>33</sup> Отметим легко доказываемую формулу дифференцирования векторного произведения векторов  $a(t)$  и  $b(t)$ , зависящих от времени:



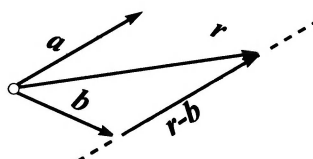
$$\frac{d(a \times b)}{dt} = \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt}.$$

Порядок сомножителей принципиален.

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

что демонстрирует ещё один путь к формуле синуса разности углов.

- Уравнением прямой, параллельной вектору  $\mathbf{a}$  и проходящей через точку  $\mathbf{b}$  (конец вектора  $\mathbf{b}$ ), служит

$$(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = 0. \quad (4.36)$$


### 4.13 Прямые и плоскости\*

По ходу дела мы уже не один раз выписывали различные уравнения прямых и плоскостей. «Различные» — потому что исполнение зависело от обстоятельств. Одному подавай прямую — перпендикулярную, другому — параллельную, третьему — фиолетовую. Конкретика мешала посмотреть на явление в целом.

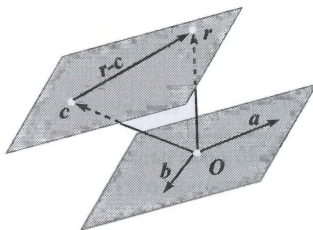
#### Различные описания плоскости

Как

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \delta = 0 \quad \text{т. е.} \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

см. (4.26), так и

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \mathbf{c}$$



с произвольными  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  задают плоскость. Первое описание служит уравнением плоскости с нормалью  $\mathbf{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  и позволяет легко проверить, принадлежит ли предъявляемая точка

$\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  этой плоскости (проверкой равенства  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \delta = 0$ ), второе параметрически задаёт плоскость, проходящую через точку  $\mathbf{c}$  и ортогональную  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , с его помощью удобно генерировать любые точки плоскости, выбирая тем или иным способом параметры  $\lambda, \mu$ .

Приведённые варианты являются опорными, но не исчерпывают возможностей. Необходимо, скажем, описать плоскость, проходящую через три заданные точки

$$\mathbf{r}^1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \mathbf{r}^2 = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad \mathbf{r}^3 = \{x_3, y_3, z_3\}.$$

Задача выглядит по-другому, но легко сводится к предыдущему. Полагая, например,

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^2, \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^3$$

и выбирая в качестве  $\mathbf{c}$  любую из точек  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ , получаем параметрическую запись плоскости  $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . Описанием первого типа будет

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{r} + \delta = 0,$$



где  $\delta$  определяется подстановкой вместо  $\mathbf{r}$  любой из точек  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \mathbf{r}^3$ .

Кстати, вместо уравнения  $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$  часто целесообразно использование его эквивалента

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0,$$

где вместо не всегда удобного параметра  $\delta$  фигурирует точка  $\{x_0, y_0, z_0\}$ , через которую проходит плоскость.

• Уравнение

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = R^2 \quad (?)$$

определяет плоскость, касающуюся сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  в точке  $\{x_0, y_0, z_0\}$ .

**Прямая.** Прямая на плоскости играет роль аналогичную той, которую играет плоскость в пространстве трёх переменных. Поэтому

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$$

есть уравнение прямой, ортогональной вектору  $\{\alpha, \beta\}$  и проходящей через точку  $\{x_0, y_0\}$ . Но для описания прямой в пространстве требуются уже два линейных уравнения

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \delta = 0, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} + \zeta = 0.} \quad (4.37)$$

Если  $\mathbf{r}$  удовлетворяет обоим уравнениям, это означает, что  $\mathbf{r}$  лежит на пересечении плоскостей, т. е. на прямой.

Наиболее удобен, пожалуй, вариант (4.36). Параметрический вариант описания прямой, проходящей через точку  $\mathbf{r}^0$ , параллельно вектору  $\mathbf{a}$ :

$$x - x^0 = a_x \tau, \quad y - y^0 = a_y \tau, \quad z - z^0 = a_z \tau,$$

где  $\tau \in \mathbb{R}$ .

При необходимости описать прямую, проходящую через две точки

$$\mathbf{r}^1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \mathbf{r}^2 = \{x_2, y_2, z_2\},$$

обычно пользуются уравнением

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.}$$



**Расстояние до плоскости.** Пусть плоскость задаёт уравнение  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \delta$ . Если  $\mathbf{r}$  разложить по взаимно перпендикулярным направлениям  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_a + \mathbf{r}_{\perp a}$ , становится ясно, что минимальная длина у  $\mathbf{r}$  будет в случае  $\mathbf{r}_{\perp a} = 0$ . Таким образом, расстояние от начала координат до плоскости равно

$$|\mathbf{r}|_{\min} = |\mathbf{r}_a| = |\delta|/|\mathbf{a}|.$$

Расстояние от произвольной точки  $\mathbf{b}$  определяется так же — после переноса в  $\mathbf{b}$  начала координат, что достигается заменой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{b}$ , и в итоге даёт величину  $|\delta - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|/|\mathbf{a}|$ .

Если требуется не само минимальное расстояние, а ближайшая к началу координат точка (на плоскости), то для ее определения надо решить систему из двух векторных уравнений:  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = \delta$  и  $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0$ , что равносильно  $\mathbf{r} \perp \mathbf{a} = 0$ .

При нежелании иметь дело с векторами — можно рассматривать координатную запись задачи:

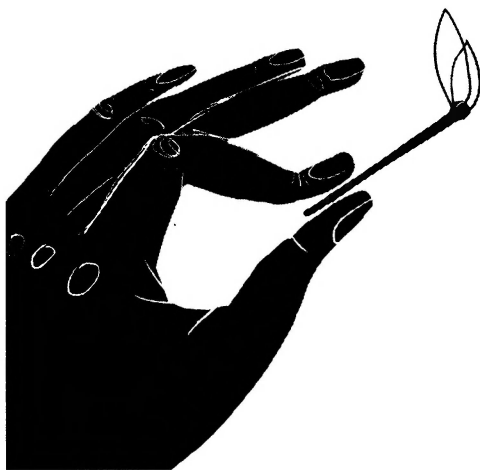
$$x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \min, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

которая легко решается *методом множителей Лагранжа*, но тут необходимо знакомство с элементами математического анализа.

**Расстояние до прямой.** Разнообразие возможностей здесь определяется вариантами задания прямой. В варианте  $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{c}$  ближайшая к началу координат точка на прямой определяется системой уравнений

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Находя решение и вычисляя длину соответствующего вектора  $\mathbf{r}$ , получаем расстояние до прямой (от начала координат).

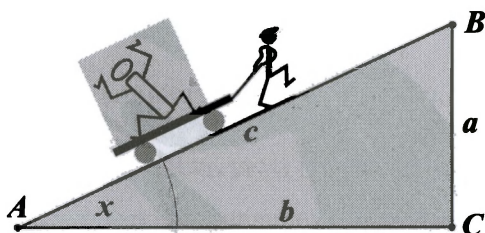




## Глава 5

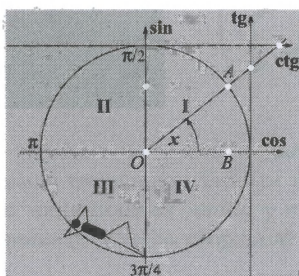
# Короткая справка

*Стенография хороша  
для конспектирования,  
но она не заменяет обычный язык.*



$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{a}{c}, \\ \cos x &= \frac{b}{c}, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{a}{b}, \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

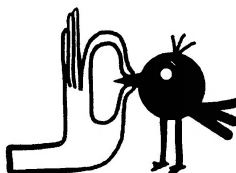
**Единичная  
окружность**





*«Если вам дали хорошее образование,  
это ещё не значит,  
что вы его получили».*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$$



$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$



$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$





*«Никто не знает столько,  
сколько не знаю я».*

### Формулы приведения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x.$$



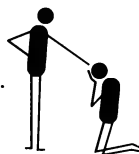
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{tg} x.$$

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x, \quad \cos(\pi \pm x) = -\cos x.$$



$$\operatorname{tg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(\pi \pm x) = \pm \operatorname{ctg} x.$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \sin x.$$



$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \mp \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \operatorname{tg} x.$$



**«Stop doing  
what isn't working».**

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$



$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$$



$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

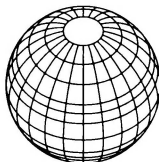


$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$



***Преодолевать отвращение  
к конкретике нелегко,  
но это потом окупается.***



$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

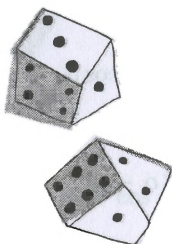


$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

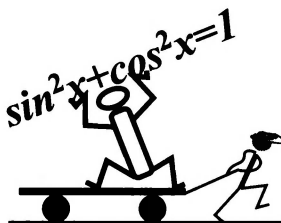
$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$$



$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

*Там где нет уловимой причины,  
 Барабан лотереи не в счет,  
 Миром косвенно правят глубины,  
 Нисходя из небесных высот.*



$$\cos x = \gamma \Rightarrow \boxed{x = \pm \arccos \gamma + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},}$$

$$\sin x = \gamma \Rightarrow \boxed{x = (-1)^k \arcsin \gamma + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},}$$

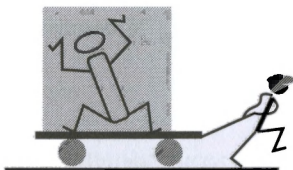
$$\operatorname{tg} x = \gamma \Rightarrow \boxed{x = \operatorname{arctg} \gamma + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

$$\operatorname{Arcsin} v = (-1)^k \arcsin v + k\pi,$$

$$\operatorname{Arccos} v = \pm \arccos v + 2k\pi.$$

$$\operatorname{Arctg} v = \operatorname{arctg} v + k\pi, \quad \operatorname{Arcctg} v = \operatorname{arctg} v + k\pi.$$

$$\boxed{a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi).}$$



**Упоминание будит,  
толкование усыпляет.**

### Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$



### Теорема синусов

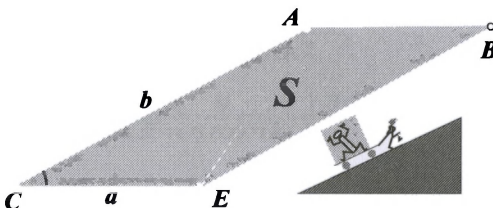
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где  $R$  — радиус описанной около  $\triangle ABC$  окружности.

### Площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$S = ab \sin C$$



### Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где  $p = \frac{a+b+c}{2}$  — полупериметр.

# Обозначения

**АА** — ссылка на книгу: *Школа Опойцева: Арифметика и алгебра*, для 6–11-х классов

**\*** — более-менее трудный материал

**◀** и **▶** — начало и конец рассуждения/темы/доказательства

**(?)** — предлагает проверить или доказать утверждение

**(!)** — предлагает обратить внимание

**п.** — пункт либо раздел

$A \Rightarrow B$ , или  $A \rightarrow B$ , — из  $A$  следует  $B$

$x \in X$  — элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$

$X \cup Y$ ,  $X \cap Y$ ,  $X \setminus Y$  — объединение, пересечение и разность множеств соответственно

$X \subset Y$  —  $X$  подмножество  $Y$

$\emptyset$  — пустое множество

$\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел  $\{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}$  — множество целых чисел  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел (дробей)



$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  — вещественная прямая

$\mathbb{R}^2$  — плоскость,  $\mathbb{R}^3$  — трёхмерное пространство

$\mathbb{C}$  — комплексная плоскость

$(a, b)$  — интервал, множество точек  $x \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющих неравенствам  $a < x < b$

$[a, b]$  — сегмент, или отрезок, множество точек  $x \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x \leq b$ .

$i$  — мнимая единица,  $i^2 = -1$

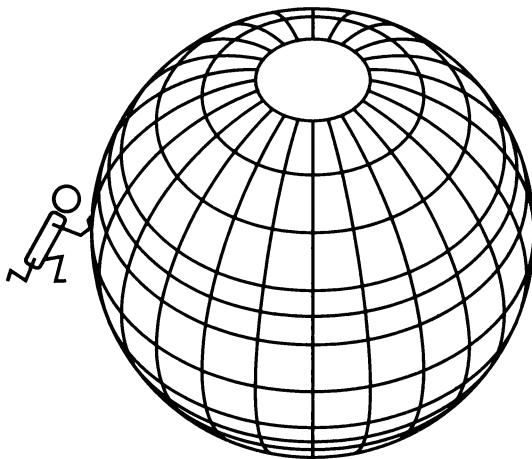
$z = x + iy$  — комплексное число (КЧ)

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  — тригонометрическая запись КЧ

$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$  — вектор,  $x_i$  — его координаты

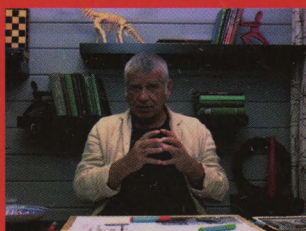
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab$  — скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$



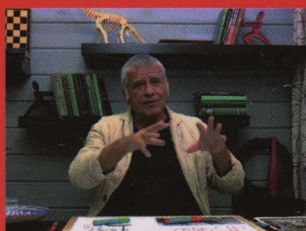
**Валерий Иванович Опойцев —**  
доктор физико-математических наук, профессор.  
*Выделяется умением сложное объяснять просто.*

Широко известны его  
«Лекции по математике»  
(под псевдонимом В. Босс),  
читайте также идущую  
нарасхват популярную  
книгу В. Босс. «Интуиция  
и математика»

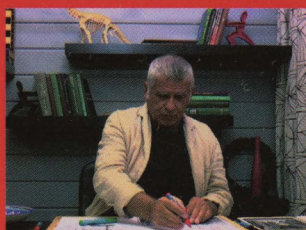


*Отзывы читателей:*

» Чтобы усвоить предмет, надо  
освободить его от деталей,  
обнажить центральные  
конструкции. Эту тяжёлую  
работу автор берёт на себя.



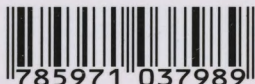
» Содержание продумано  
и хорошо увязано.  
Доказательства ужаты  
до нескольких строчек.  
Виртуозное владение  
языком.



» Даётся то, чего недостает.  
Общая картина, мотивация,  
взаимосвязи. И самое  
главное — лёгкость  
вхождения в любую тему.

Все книги проекта  
**ШКОЛА ОПОЙЦЕВА**  
сопровожаются  
видеолекциями  
на **oschool.ru**  
и на **youtube.com**

20575 ID 219356



9

785971 037989

Издательская группа

**URSS**



Каталог изданий  
в Интернете:  
<http://URSS.ru>

E-mail: [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru)

117335, Москва, Телефон / факс  
Нахимовский (многоканальный)  
проспект, 56 +7 (499) 724 25 45

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные  
опечатки присылайте по адресу [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru).  
Ваши замечания и предложения будут учтены  
и отражены на web-странице этой книги на сайте  
<http://URSS.ru>